PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Ruch drgający

Zadania z rozwiązaniami

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zadanie 1
Na pionową sprężynę o stałej sprężystości *k* położono małą kulkę o masie *m* i ściśnięto sprężynę o *l* (od położenia równowagi). Wyznacz wysokość, na jaką wzniesie się wystrzelona kulka.

Energia zgromadzona w sprężynie odchylonej od położenia równowagi o *l* wynosi:

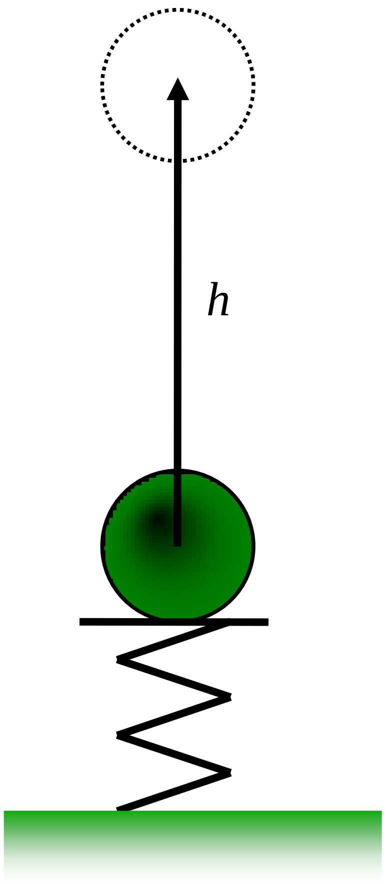
$$E_{PS}=\frac{1}{2}kl^2$$

Podczas powrotu sprężyny do stanu równowagi, jest ona przekazywana kulce (rozpędza ją). Następnie energia kinetyczna kuli zostaje zamieniona na energię potencjalną pola grawitacyjnego. W chwili osiągnięcia pułapu (najwyższej wysokości), energia kinetyczna kulki wynosi 0, a jej energia potencjalna pola grawitacyjnego równa się początkowej energii potencjalnej sprężyny, tj.:

$$E_{PG}=mgh=E_{PS}=\frac{1}{2}kl^2$$

Stąd otrzymujemy:

$$h=\frac{kl^2}{2mg}$$



Zadanie 2
O ile trzeba zmienić długość wahadła zegara, jeśli spieszy się on o 24 sekundy na dobę? Aktualna długość wahadła *l* = 30 cm.

Okres drgań wahadła matematycznego dany jest wzorem:

$$T = 2\pi\sqrt{\tfrac{l}{g}}$$

Zegar spieszy się o 1 sekundę na godzinę, stąd stosunek jego okresu do okresu zegara prawidłowo nastawionego, wynosi:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{3600-1}{3600} = \frac{3599}{3600}$$

Z powyższych zależności otrzymujemy:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{l/g}}{\sqrt{l_0/g}} = \sqrt{\frac{l}{l_0}} \Rightarrow l_0 = l\cdot\left(T/T_0\right)^2 = 29{,}9833cm$$

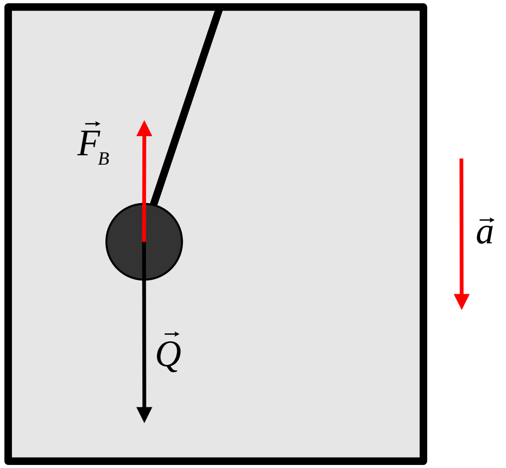
Wahadło trzeba zatem skrócić o:

$$x = l - l_0 \approx 0{,}17mm$$

Zadanie 3
Wahadło matematyczne wykonuje drgania o okresie T_0. Jak zmieni się okres drgań, jeśli wahadło umieścimy w szybkiej windzie poruszającej się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem a = ¼ g: a) w dół; b) w górę?

Winda, poruszająca się ruchem przyspieszonym, jest układem nieinercjalnym, w którym „pojawiają się” siły bezwładności, zależne od przyspieszenia układu. Ruch wahadła (o masie m), prócz siły grawitacyjnej, determinowany jest ponadto przez siłę bezwładności działającą na wahadło:

$$\vec{F}_B = -m\vec{a}$$

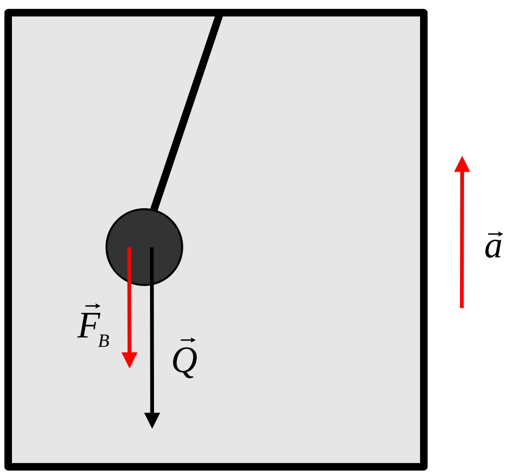


Siła ta działa pionowo, a jej zwrot zależny jest od zwrotu przyspieszenia a. Sumując siłę grawitacji i bezwładności otrzymujemy siłę wypadkową:

$$\vec{F}_w = m\vec{g} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a}) = m\vec{g}\,'$$

Ruch wahadła możemy zatem rozpatrywać tak, jakby znajdowało się ono w układzie inercjalnym, w którym przyspieszenie ziemskie wynosi g'. Stąd okres drgań wahadła:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g \mp a}}$$



W zależności od zwrotu przyspieszenia, otrzymujemy:

$$\frac{T_a}{T_0} = \sqrt{\frac{g-a}{a}} < 1$$

$$\frac{T_b}{T_0} = \sqrt{\frac{g+a}{a}} > 1$$

Zadanie 4

Sztywny, cienki pręt o długości *l* zawieszono na prostopadłej osi, przecinającej go w punkcie odległym od końca o *k·l* (*k* < 1). Jaki jest okres drgań takiej bryły? Dla jakiej wartości *k* okres będzie najmniejszy?

Okres drgań wahadła fizycznego dany jest wzorem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

gdzie: *d* – odległość środka masy od osi obrotu,

I – moment bezwładności bryły względem osi obrotu.

Korzystając z tw. Steinera, otrzymujemy moment bezwładności tak zawieszonego pręta:

$$I = I_0 + md^2 = \tfrac{1}{12}ml^2 + m\left(\tfrac{1}{2}l - k\right)^2$$

Zatem okres drgań wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\tfrac{1}{12}ml^2 + m\left(\tfrac{1}{2}l - k\right)^2}{mg\left(\tfrac{1}{2}l - k\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{\tfrac{1}{12}l^2 + \left(\tfrac{1}{2}l - k\right)^2}{g\left(\tfrac{1}{2}l - k\right)}}$$

Zadanie 5

Wiaderko o masie *m* = 100 g drga na pionowo zawieszonej sprężynie z częstotliwością *f* = 5 Hz. Ile wyniesie okres drgań, jeśli do kubełka włożymy *M* = 0,9 kg piasku?

Okres oraz częstotliwość drgań oscylatora harmonicznego dane są zależnościami:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f = 1/T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Po dosypaniu piasku, zmienia się masa oscylatora, a zatem jego częstotliwość:

$$f_{M+m} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+M}}$$

Stosunek obu okresów wynosi:

$$\frac{f_{M+m}}{f_m} = \sqrt{\frac{k/(m+M)}{k/m}} = \sqrt{\frac{m}{m+M}}$$

Zatem częstotliwość drgań obciążonego piaskiem wiaderka wynosi:

$$f_{M+m} = f_m\sqrt{\frac{m}{m+M}} = \frac{5}{\sqrt{10}}\,Hz \approx 1{,}58\,Hz$$

Zadanie 6

Oblicz częstość kołową drgań ciała, jeśli w momencie wychylenia o *Dx* = 3,46 cm, co stanowiło połowę amplitudy, jego prędkość wynosiła *u* = 0,2 m/s.

Wychylenie i prędkość ciała poruszającego się ruchem harmonicznym z częstością kołową ω, wynoszą:

$x(t) = A\,sin(\omega t)$ $\qquad$ $\upsilon(t) = A\omega\,cos(\omega t)$

Skoro $x = A/2$, to:

$$A\,sin(\omega t) = A/2 \Rightarrow sin(\omega t) = \tfrac{1}{2}$$

Korzystając z „jedynki” trygonometrycznej ($cos^2(\omega t) + sin^2(\omega t) = 1$), otrzymujemy:

$$cos(\omega t) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \upsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}A\omega \Rightarrow \omega = \frac{2\upsilon}{\sqrt{3}A} = \frac{\upsilon}{\sqrt{3}\Delta x}$$

Podstawiając wartości liczbowe (uwaga na jednostki!), otrzymujemy:

$$\omega = \frac{0{,}2m/s}{\sqrt{3}\cdot 0{,}0346m} = 3{,}34\frac{rad}{s}$$

Zadanie 7

Pokaż, że podczas drgań harmonicznych, całkowita energia mechaniczna układu jest zachowana.

Na energię mechaniczną drgań składa się energia kinetyczna i potencjalna, które wynoszą, odpowiednio:

$$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2} \qquad E_p = \frac{kx^2}{2}$$

Korzystając z zależności na wychylenie i prędkość z poprzedniego zadania, otrzymujemy:

$$E_k = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t) \qquad E_p = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega t)$$

Sumując obie energie oraz uwzględniając, że $\omega = \sqrt{k/m}$, otrzymujemy:

$$E = E_k + E_p = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t) + \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega t) = \frac{kA^2}{2}\left[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right] = \frac{kA^2}{2} = const$$

Zadanie 8
Oblicz amplitudę drgań harmonicznych wiedząc, że całkowita energia mechaniczna wynosi E = 30 mJ, a siła działająca na ciało przy połowicznym wychyleniu wynosi $F_{½}$ = 2 N.

Jak to wynika z poprzednich zadań, energia ciała w momencie maksymalnego wychylenia równa jest całkowitej energii mechanicznej ruchu drgającego, tj.:

$$E = \frac{kA^2}{2}$$

Natomiast siła w połowie amplitudy wynosi:

$$F = -kx = -k\frac{A}{2} = -F_{1/2} \rightarrow F_{1/2} = k\frac{A}{2}$$

Dzieląc powyższe wyrażenia przez siebie, otrzymujemy:

$$\frac{E}{F_{1/2}} = \frac{2kA^2}{2kA} = A$$

Podstawiając wartości liczbowe, otrzymujemy końcowy wynik:

$$A = \frac{30\,\mathrm{mJ}}{2\,\mathrm{N}} = 15\,\mathrm{mm} = 1{,}5\,\mathrm{cm}$$

Zadanie 9

Do U-rurki o przekroju poprzecznym S = 10 cm^2 nalano V = 2 l wody. Oblicz okres drgań słupa cieczy, jeśli została ona wychylona z położenia równowagi (np. poprzez dmuchnięcie do jednego z końców). Lepkość cieczy zaniedbać.

W drganiach słupa cieczy, funkcję siły harmonicznej pełni siła grawitacyjna (ciężar) cieczy w jednej z rurek, znajdującej się powyżej poziomu cieczy w drugiej rurce:

$$F = F_g = mg = -Sh\rho g = -2Sx\rho g$$

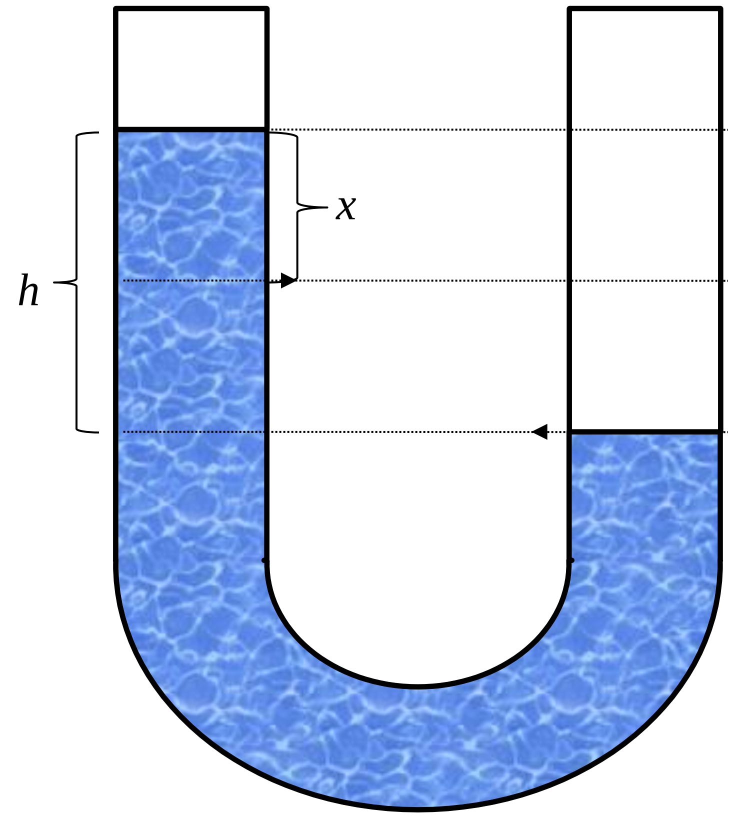
Siła działająca na słup cieczy zależy liniowo od wychylenia x i jest przeciwnie skierowana, jest to więc siła harmoniczna:

$$F = -kx = -2Sh\rho gx \Rightarrow k = 2S\rho g$$

Zatem okres drgań wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho V}{2S\rho g}} = 2\pi\sqrt{\frac{V}{2Sg}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\cdot 10^{-3}\, m^3}{2\cdot 10^{-3}\, m^2\cdot 10\,\frac{m}{s^2}}} \approx 2s$$



Zadanie 10
Przez środek Ziemi wydrążono tunel, do którego wpuszczono swobodnie poruszającą się kapsułę. Czy ruch kapsuły w tunelu będzie harmoniczny? Wyznacz wyrażenie na okres drgań. Czy zależy on od masy kapsuły? Opory ruchu zaniedbać.

Siła grawitacji w odległości *r* od środka Ziemi (mniejszej lub równej promieniowi planety *R*) pochodzi od masy *M*(*r*) znajdującej się tylko wewnątrz tej sfery, tj:

$$F_g = -G\frac{mM(r)}{r^2} = -G\frac{m\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{r^2} = -\tfrac{4}{3}\pi G m\rho r$$

Zatem siła działająca na kapsułę w czasie ruchu jest wprost proporcjonalna do odległości od środka planety (wychylenia). Jest to więc siła harmoniczna o współczynniku *k*:

$$k = \tfrac{4}{3}\pi G m\rho$$

Okres drgań tego ruchu będzie wynosił:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{4}{3}\pi G m\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

Okres drgań nie zależy od masy kapsuły.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. O ile trzeba zmienić długość wahadła zegara, jeśli późni się on o 48 sekund na dobę? Aktualna długość wahadła l_0 = 30 cm. (*Odp. Wahadło należy wydłużyć o ok. 0,33 mm*)
2. Wahadło matematyczne wykonuje drgania o okresie *T*. Jak zmieni się okres drgań, jeśli wahadło umieścimy w wagonie metra poruszającego się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem *a* = ¼ *g*? (*Odp. Zmaleje o ok. 1,5%*)
3. Sztywny, cienki pręt o długości *l* = 60 cm zawieszono na prostopadłej osi, przecinającej go w odległości *x* = 10 cm od jego końca. Jaki jest okres drgań takiej bryły? (*Odp. 1,175 s*)
4. Kubełek o masie *m* = 100 g drga na pionowo zawieszonej sprężynie. Do kubełka wsypano pewną nieznaną masę piasku (*M*). Ile piasku wsypano, jeśli okres drgań zwiększył się czterokrotnie? (*Odp. 1,5 kg*)
5. Oblicz okres drgań ciała, jeśli w momencie, w którym ciało osiągnęło prędkość *u* = 0,1 m/s, stanowiącą połowę prędkości maksymalnej, wychylenie wynosiło *x* = 17,3 cm (*Odp. 6,28 s*)
6. Jak zależy prędkość maksymalna w ruchu harmonicznym od amplitudy drgań? (*Odp.Jest wprost proporcjonalna*)
7. Po jakim czasie od chwili opuszczenia położenia równowagi energia kinetyczna drgającego ciała zrówna się z jego energią potencjalną? Okres drgań *T* = 24 s. (*Odp. 3 s*)
8. Do U-rurki nalano wody *V* = 2 l wody. Została ona wychylona z położenia równowagi (np. poprzez dmuchnięcie do jednego z końców) i przez to wprawiona w drgania o okresie *T* = 4 s. Oblicz przekrój poprzeczny rurki. (*Odp. S =* $2{,}46\ cm^2$)
9. Oblicz okres drgań ciała o masie *m* = 100 g przymocowanego do ściany na dwóch sprężynach o stałych sprężystości k_1 = 10 N/m i k_2 = 30 N/m, jeśli sprężyny są zamocowane jedna obok drugiej. (*Odp. 0,314 s*)
10. W skorupie Ziemi wydrążono prosty tunel na wylot planety tak, że przechodzi on w odległości *d* od środka planety. Czy okres ruchu kapsuły w tym tunelu zależy od parametru *d*? (*Odp. Nie*)