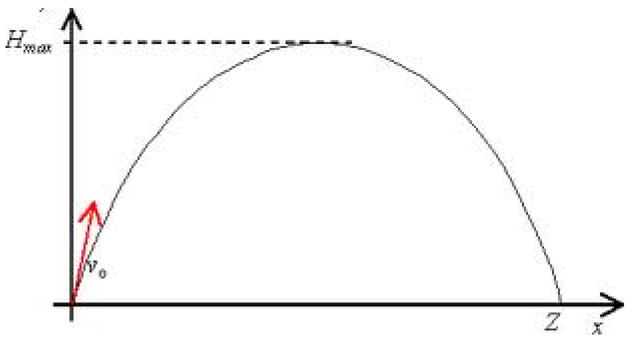
Mechanika

Zadania z rozwiązaniami

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1. Ciało o masie *m* wystrzelono pod kątem α_0 do poziomu z prędkością V_0. Siła oporu jest proporcjonalna do prędkości $F = -kV$. Opisać ruch tego ciała . Znaleźć maksymalną wysokość na jaką wzniesie się to ciało.



W kierunku osi *OX* ruch ciała opisuje równanie różniczkowe:

$$ma_x = -kv_x$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt}$$

W kierunku osi OY rucha ciała opisuje równanie:

$$ma_y = -kv_y - mg$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{dy}{dt}$$

Z warunków początkowych otrzymujemy następujące zależności:

$x(0) = 0$
$y(0) = 0$ w chwili początkowej ciało znajdowało się w początku układu współrzędnych

$$\frac{dx}{dt}(0) = V_{0x} = V_0 \sin\alpha$$

$$\frac{dy}{dt}(0) = V_{0y} = V_0 \cos\alpha$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}v_x$$

$$\int_{V_{ox}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = \int_0^t -\frac{k}{m}dt$$

$$[\ln(v_x)]_{V_{0x}}^{v_x} = -\frac{k}{m}t$$

$$\ln\left(\frac{v_x}{V_{0x}}\right)=-\frac{k}{m}t$$

$$v_x=V_{0x}e^{-\frac{kt}{m}}$$

$$x=\int_0^t v_x dt=\int_0^t V_{0x}e^{-\frac{kt}{m}}dt=V_{0x}\int_o^t e^{-\frac{kt}{m}}dt=\left|\begin{matrix} z=-\dfrac{kt}{m} \\ dt=-\dfrac{mdz}{k}\end{matrix}\right|=V_{0x}\left(-\frac{m}{k}\right)\int_0^{-\frac{m}{k}z}e^z dz=V_{0x}\left(-\frac{m}{k}\right)\left(e^{-\frac{m}{k}z}-1\right)=V_{0x}\frac{m}{k}\left(1-e^t\right)$$

$$\frac{dv_y}{dt}=-\frac{k}{m}V_{0y}-g$$

$$-\frac{m}{k}\frac{dz}{dt}=z\Rightarrow z=-\frac{k}{m}V_{0y}-g\Rightarrow dz=-\frac{k}{m}dv_y$$

$$\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{z}=\frac{k}{m}\int_0^t dt$$

$$\ln\frac{z}{z_0}=-\frac{k}{m}t$$

$$z=z_0e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$-\frac{k}{m}v_y-g=\left(-\frac{k}{m}V_{0y}-g\right)e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v_y=\frac{m}{k}\left(\left(\frac{k}{m}V_{0y}+g\right)e^{-\frac{k}{m}t}-g\right)$$

$$y=\int_0^t v_y dt=\int_0^t\frac{m}{k}\left(\left(\frac{k}{m}V_{0y}+g\right)e^{-\frac{k}{m}t}-g\right)dt=\int_0^t V_{0y}e^{-\frac{k}{m}t}dt+\int_0^t\frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}dt-\int_0^t\frac{mg}{k}dt=\left|\begin{matrix} z=-\dfrac{k}{m}t \\ dt=-\dfrac{m}{k}dz\end{matrix}\right|=$$

$$=V_{0y}\left(-\frac{m}{k}\right)\int_0^{-\frac{mz}{k}}e^z dz+\frac{mg}{k}\left(-\frac{m}{k}\right)\int_0^{-\frac{mz}{k}}e^z dz-\frac{mgt}{k}=\left(1-e^t\right)\left(\frac{m}{k}\right)^2\left(\frac{k}{m}V_{0y}+g\right)-\frac{mgt}{k}$$

$$\left(\frac{k}{m}V_{0y}+g\right)e^{-\frac{k}{m}t}=g$$

$$\frac{k}{mg}V_{0y}+1=e^{\frac{k}{m}t}$$

$$\ln\left(\frac{k}{mg}V_{0y}+1\right)=\frac{k}{m}t$$

$$t=\frac{m}{k}\ln\left(\frac{k}{mg}V_{0y}+1\right)$$

$$y_{\max}=\left(1-e^t\right)\left(\frac{m}{k}\right)^2\left(\frac{k}{m}V_{0y}+g\right)-\frac{mgt}{k}$$

2. Kolista tarcza o promieniu *R* wiruje wokół swojej osi ze stałą prędkością kątową ω. Ze środka tarczy wyrusza mrówka, która porusza się wzdłuż wybranego promienia ze stałą prędkością V_0. Znaleźć

- Równania ruchu: toru biedronki w nieruchomym układzie odniesienia
- Zależność od czasu wektora prędkości
- Zależność od czasu wektora przyspieszenia
- Zależność od czasu promienia krzywizny toru
- Całkowitą długość drogi pokonanej przez mrówkę względem nieruchomego układu odniesienia

Zadania rozwiązać w kartezjańskim układzie współrzędnych.

Prędkość

$$x = l\cos\alpha$$

$$y = l\sin\alpha$$

$$l = v_0 t$$

$$\alpha = \omega t$$

$$x = v_0 t\cos\omega t$$

$$y = v_0 t\sin\omega t$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v_x = \frac{d}{dt}\left(v_0 t\cos\omega t\right) = \cos\omega t\,\frac{d}{dt}\left(v_0 t\right) + v_0 t\,\frac{d}{dt}\left(\cos\omega t\right) = v_0\cos\omega t - v_0\omega t\sin\omega t$$

$$v_y = \frac{d}{dt}\left(v_0 t\sin\omega t\right) = \sin\omega t\,\frac{d}{dt}\left(v_0 t\right) + v_0 t\,\frac{d}{dt}\left(\sin\omega t\right) = v_0\sin\omega t + v_0\omega t\cos\omega t$$

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = v_0\sqrt{1+\omega t}$$

Tor :

$$l = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{v_0}$$

$$l = v_0 t \Rightarrow$$

$$x = v_0 t\cos\omega t$$

$$y = v_0 t\sin\omega t$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\omega t}{\cos\omega t} = tg\,\omega t = tg\,\frac{\omega}{v_0}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{v_0}$$

Przyspieszenie:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V_0 \cos\omega t - V_0\omega t\sin\omega t\right) = -V_0\omega\sin\omega t - V_0\omega\sin\omega t - V_0\omega^2 t\cos\omega t = -2V_0\omega\sin\omega t - V_0\omega^2 t\cos\omega t$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V_0 \sin\omega t + V_0\omega t\cos\omega t\right) = 2V_0\omega\cos\omega t - V_0\omega^2 t\sin\omega t$$

$$a = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2}} = \sqrt{\left(-2V_0\omega\sin\omega t - V_0\omega^2 t\cos\omega t\right)^2 + \left(2V_0\omega\cos\omega t - V_0\omega^2 t\sin\omega t\right)^2} = V_0\omega\sqrt{4+\omega^2 t^2}$$

$$a_s = \frac{d}{dt}v = \frac{d}{dt}\left(V_0\sqrt{1+\omega^2 t^2}\right) = \frac{V_0\omega^2 t}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}$$

$$a_r = \sqrt{a^2 - a_s^{\ 2}} = \sqrt{V_0^{\ 2}\omega^2\left(4+\omega^2 t^2\right) - \frac{V_0^{\ 2}\omega^4 t^2}{1+\omega^2 t^2}} = \frac{V_0\omega\left(2+\omega^2 t^2\right)}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}$$

$$a_r = \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{v^2}{a_r}$$

$$a_r = \frac{V_0^{\ 2}\left(1+\omega^2 t^2\right)}{\frac{V_0\omega\left(2+\omega^2 t^2\right)}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}} = \frac{V_0^{\ 2}\left(1+\omega^2 t^2\right)^{3/2}}{\omega\left(2+\omega^2 t^2\right)}$$

Całkowita droga:

Ruch będzie odbywał się do momentu, w którym mrówka dojdzie do końca tarczy.

$$s = \int_0^T v\,dt$$

$$T = \frac{R}{V_0}$$

$$S = \int_0^{R/V_0} V_0\sqrt{\left(1+\omega^2 t^2\right)}dt = V_0\omega\int_0^{R/V_0}\sqrt{\left(\frac{1}{\omega^2}+t^2\right)}dt$$

$$= \frac{1}{2}V_0\omega\left[t\sqrt{\left(\frac{1}{\omega^2}+t^2\right)} + \frac{1}{\omega^2}\operatorname{arcsin}h\left(\omega t\right)\right]_0^{R/V_0} = \frac{1}{2}V_0\omega\left[\frac{R}{V_0}\sqrt{\left(1+\frac{\omega^2 R^2}{V_0^{\ 2}}\right)} + \frac{1}{\omega^2}\operatorname{arcsin}h\left(\frac{\omega R}{V_0}\right)\right]$$

Wartość takiej całki odczytujemy z tablic i otrzymujemy

$$S = \frac{1}{2}V_0\omega\left[t\sqrt{\left(\frac{1}{\omega^2}+t^2\right)} + \frac{1}{\omega^2}\operatorname{arcsin}h\left(\omega t\right)\right]_0^{R/V_0} = \frac{1}{2}V_0\omega\left[\frac{R}{V_0}\sqrt{\left(1+\frac{\omega^2 R^2}{V_0^{\ 2}}\right)} + \frac{1}{\omega^2}\operatorname{arcsin}h\left(\frac{\omega R}{V_0}\right)\right]$$

3. Punkt materialny porusza się ruchem prostoliniowym w taki sposób, że przyspieszenie wzrasta proporcjonalnie do czasu. Wiadomo, że po pierwszych 20 sekundach ruchu przyspieszenie ciała wzrosłoby od 0 do 10 m/s^2. Jaka będzie prędkość ruchu punktu materialnego po pierwszych 10 s ruchu oraz jaką drogę przebędzie punkt materialny do tego czasu. Zakładamy, że w chwili początkowej t = 0 punkt materialny znajdował się w spoczynku.

Zależność przyspieszenia od czasu można wyrazić wzorem

$$a(t) = kt$$

$$k = \frac{a_{20}}{t_{20}} = \frac{10\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}}{20s} = 0.5\frac{m}{s^3}$$

a_{20} - przyspieszenie w dwudziestej sekundzie ruchu

t_{20} = 20s

W ruchu zmiennym

$$v(t) = \int a(t)dt$$

Całka przyspieszenia względem czasu to funkcja określająca sposób zmian przyspieszenia w czasie:

$$v(t) = \int a(t)dt = \frac{1}{2}kt^2 + C$$

Wartość C określamy na podstawie warunków brzegowych . Z treści zadania wynika, że dla t= 0 v_0 = 0 (w chwili początkowej ciało było w spoczynku).

$$0 = \frac{1}{2}k0^2 + C \Rightarrow C = 0$$

$$v(10) = \frac{1}{2}k \cdot 10^2\left[\frac{m}{s^3} \cdot s^2\right] = 25\frac{m}{s}$$

W ruchu zmiennym

$$s(t) = \int v(t)dt$$

W poprzednim punkcie wykazaliśmy, że

$$v(t) = \frac{1}{2}kt^2$$

$$s(t) = \int v(t)dt = \int \frac{1}{2}kt^2dt = \frac{1}{6}kt^3 + C$$

Wartość stałej wyliczamy z warunków początkowych. Z treści zadania wynika, że w chwili czasu równej t = 0 punkt materialny dopiero rozpoczynał ruch a więc s_0 = 0;

$$0 = \frac{1}{6}k0^3 + C \Rightarrow C = 0$$

$$s(10s) = \frac{1}{6} \cdot 0.5 \cdot 10^3\left[\frac{m}{s^3}\right] = 83.3m$$

4. Jaką ilość paliwa musi zabrać jednostopniowa rakieta, aby w wyniku jego spalenia uzyskać I prędkość kosmiczną. Masa rakiety bez paliwa wynosi mR = 100 kg, a prędkość wypływu gazów *u* = 3000 m/s

Pęd rakiety w czasie t dany jest wzorem

$$p_e = m \cdot v$$

W czasie *dt* z rakiety uchodzą gazy o masie *dm'* z prędkością *u*. W tym czasie prędkość rakiety wzrośnie z *V* do *V* + *dv*. Zatem pęd całego układu w czasie *t* + *dt* będzie równy

$$p_{t+dt} = (m - dm')(v + dv) + udm'$$

Zgodnie z zasadą zachowania pędu

$$p_{t+dt} = p_t$$

$$mv = (m - dm')(v + dv) + udm'$$

Uwzględniając fakt, że dm'=-dm, masa wypływających gazów równa jest ubytkowi masy rakiety oraz pomijając składnik dmdv otrzymujemy

$$mv = mv + mdv + vdm - udm$$

u-*v* oznaczymy jako v_r (jest to względna prędkość gazów względem rakiety)

$$dv = -\frac{dm}{m} v_r$$

jest to równanie różniczkowe

Po scałkowaniu stronami otrzymujemy

$$v = -v_r \ln(m) + C$$

Wartość *C* określamy z warunków początkowych

Dla $t_0 = 0$ $v_0 = 0$ $m = m_0$

$$0 = -v_r \ln(m_0) + C \Rightarrow C = v_r \ln(m_0)$$

Ostatecznie

$$v = v_r \ln \frac{m_0}{m}$$

M_0 masa początkowa rakiety razem z paliwem

Prędkość końcowa jaką uzyska rakieta po zużyciu paliwa będzie dana wzorem

$$v_k = v_r \ln \frac{m_0}{m_k}$$

M_k masa rakiety bez paliwa

$$m_0 = m_k e^{\frac{v_k}{m_k}}$$

Ostatecznie

$$m_p = m_k \left(e^{\frac{v_k}{m_k}} - 1 \right) \approx 1300\,\text{kg}$$

5. Walec ślizga się bez oporu po gładkiej poziomej płaszczyźnie z prędkością v_0. W pewnej chwili walec przekracza granicę pomiędzy powierzchnią gładką i chropowatą. Współczynnik tarcia poślizgowego pomiędzy walcem a powierzchnią chropowatą wynosi *f*. Obliczyć czas t_k, po którym walec będzie toczył się ruchem jednostajnym bez poślizgu. Obliczyć jaka część energii kinetycznej walca, została utracona do tego czasu na skutek tarcia.

Po przekroczeniu granicy między powierzchniami na walec zaczyna działać siła tarcia $T = mgf$

Siła ta będzie powodowała zmniejszenie prędkości liniowej, a moment tej siły wzrost prędkości kątowej walca

$$v_k = v_0 - fg \cdot t$$

$$\omega_k = \frac{M_T}{J} t = \frac{Rmgf}{\frac{1}{2} mR^2} t = \frac{2gf}{R} t$$

Po czasie t_k $v = \omega R$ i ruch będzie odbywał się bez poślizgu.

$$v_k = v_0 - fg \cdot t_k = \frac{2gf}{R} t_k \cdot R$$

$$v_0 = 3gft_k$$

$$t_k = \frac{v_0}{3gf}$$

Po czasie t_k prędkość liniowa walca będzie wynosiła

$$v_k = v_0 - fg \cdot t_k$$

$$v_k = v_0 - fg \cdot \frac{v_0}{3gf} = \frac{2}{3} v_0$$

A prędkość kątowa

$$\omega_k = \frac{2gf}{R} \cdot t_k = \frac{2gf}{R} \cdot \frac{v_0}{3gf} = \frac{2}{3} \frac{v_0}{R}$$

Całkowita energia kinetyczna tak poruszającego się walca jest sumą energii kinetycznej w ruchu postępowym i obrotowym

$$E_k = \frac{mv_k^2}{2} + \frac{J\omega_k^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot \frac{4}{9} v_0^2 + \frac{4}{9} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \frac{v_0^2}{R^2} = \frac{2mv_0^2}{9} + \frac{mv_0^2}{9} = \frac{1}{3} mv_0^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{mv_0^2}{2} = \frac{2}{3} E_{kp}$$

Oznacza to że 1/3 energii początkowej walca zostało zużyte na pracę przeciwko sile tarcia.

6. Jednorodny walec o promieniu *R* i masie *M* wprowadzono w ruch obrotowy wokół jego osi symetrii nadając mu prędkość kątową ω_0, następnie walec ten położono na poziomej płaszczyźnie. Współczynnik tarcia poślizgowego między walcem a płaszczyzną wynosi *f*. Znaleźć czas t_k po którym ruch będzie odbywał się bez poślizgu.

$$T = mgf$$

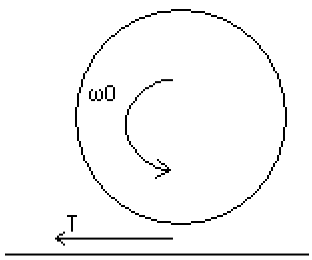
$$M_T = mgf \cdot R$$

Ruch odbywa się z poślizgiem jeżeli

$v < \omega R$

Na początku $V = 0$ a $\omega = \omega_0$. Siła tarcia jest w tym przypadku odpowiedzialna za nadawanie przyspieszenia liniowego, a moment siły tarcia za opóźnienie kątowe w ruchu obrotowym walca.

$$a = \frac{T}{m} = gf$$



W taki sposób rośnie prędkość liniowa walca

$$v = a \cdot t = gft$$

$$\varepsilon = \frac{M_T}{J} = \frac{mgfR}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{2gf}{R}$$

W taki sposób zmienia się prędkość kątowa walca

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon \cdot t = \omega_0 - \frac{2gf}{R} \cdot t$$

Po czasie t_k prędkości v i ω spełnią warunek

$v = \omega R$

Wtedy znika siła tarcia poślizgowego i walec będzie toczył się ruchem jednostajnym

$$gft_k = R\left(\omega_0 - \frac{2gf}{R} t_k\right)$$

$$gft_k + 2gft_k = \omega_0 R$$

$$3gft_k = \omega_0 R$$

$$t_k = \frac{\omega_0 R}{3gf}$$

7. Kula o masie *m* tocząca się po równi pochyłej o kącie nachylenia α ma w pewnym momencie energię kinetyczną E_0. Po jakim czasie wartość jej energii będzie dwukrotnie większa. Zakładamy że ruch odbywa się bez poślizgu.

Równanie ruchu obrotowego względem chwilowej osi obrotu przechodzącej przez punkt styczności kuli z równią:

$$J \cdot \varepsilon = Rmg\sin\alpha$$

$$\frac{7}{5}mR^2 \cdot \varepsilon = Rmg\sin\alpha$$

$$\varepsilon = \frac{5g\sin\alpha}{7R}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t = \omega_0 + \frac{5g\sin\alpha}{7R} \cdot t$$

$$E_0 = \frac{J\omega_0^{\ 2}}{2}$$

$$E = \frac{J\omega^2}{2}$$

$$2E_0 = E$$

$$\omega_0^{\ 2} = \frac{2E_0}{\frac{7}{5}mR^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{10E_0}{7mR^2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{20E_0}{7mR^2}}$$

$$\sqrt{\frac{20E_0}{7mR^2}} = \sqrt{\frac{10E_0}{7mR^2}} + \frac{5g\sin\alpha}{7R} \cdot t$$

$$t = \sqrt{\frac{10E_0}{7mR^2}}\left(\sqrt{2} - 1\right)\frac{7R}{5g\sin\alpha} = \sqrt{\frac{14E_0}{5m}}\frac{\left(\sqrt{2} - 1\right)}{g\sin\alpha}$$

8. Z Wierzchołka nieruchomej dużej kuli o promieniu R zaczyna staczać się bez poślizgu mała kulka o promieniu r. znaleźć:
- Na jakiej wysokości licząc od punktu początkowego mała kulka oderwie się od dużej
- Znaleźć prędkość małej kulki w momencie oderwania

$$\frac{x}{R+r} = \cos\alpha$$
$$x = (R+r)\cos\alpha$$
$$h = (R+r) - (R+r)\cos\alpha$$
$$h = (R+r)(1-\cos\alpha)$$
$$F_n = mg\cos\alpha$$

Oderwanie nastąpi jeżeli siła odśrodkowa zrównoważy siłę nacisku

$$\frac{mv^2}{R+r} = mg\cos\alpha$$

Z zasady zachowania energii dostajemy równanie

$$\frac{J\omega^2}{2} = mgh$$

Moment bezwładności kuli względem chwilowej osi obrotu

$$J = \frac{7mr^2}{5}$$

Zatem

$$\frac{7mr^2\omega^2}{10} = mg(R+r)(1-\cos\alpha)$$

$$\begin{cases} \dfrac{mv^2}{R+r} = mg\cos\alpha \\ \dfrac{7mr^2\omega^2}{10} = mg(R+r)(1-\cos\alpha) \end{cases}$$

$$v^2 = (R+r)g\cos\alpha$$
$$\frac{17}{10}\cos\alpha = 1$$
$$\cos\alpha = \frac{10}{17}$$

Oderwanie nastąpi dla kąta alfa, którego cosinus będzie równy 10/17; będzie to na wysokości

$$h = (R+r)\left(1-\frac{10}{17}\right) = \frac{7}{17}(R+r)$$
$$v = \sqrt{\frac{10}{17}(R+r)g}$$

9. Z wierzchołka dużej kuli o promieniu R zaczyna zsuwać się bez tarcia ciało. Znaleźć:

- Na jakiej wysokości licząc od punktu początkowego ciało oderwie się od kuli
- Jaka będzie prędkość ciała w momencie oderwania
- W jakiej odległości licząc od punktu styku kuli z podłożem spadnie ciało

$$x = R \cdot \cos\alpha$$

$$h = R - x = R(1 - \cos\alpha)$$

$$H = R + x = R(1 + \cos\alpha)$$

$$Z_1 = R\sin\alpha$$

W punkcie *B* ciało oderwie się od powierzchni kuli. W punkcie tym siła odśrodkowa zrównoważy składową siły ciężkości prostopadłą do powierzchni kuli. Prędkość ciała w punkcie *B* obliczamy z zasady zachowania energii

$$mgh = \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$$

Siła odśrodkowa w punkcie *B*

$$F_R = \frac{mv_1^2}{R} = \frac{2mgh}{R} = \frac{2mgR(1 - \cos\alpha)}{R}$$

Oderwanie nastąpi jeżeli

$$F_R = F_N$$

A więc

$$\frac{2mgR(1 - \cos\alpha)}{R} = mg\cos\alpha$$

$$2 - 2\cos\alpha = \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Oderwanie nastąpi przy kącie, którego cosinus=2/3 i od tego momentu mamy do czynienia z rzutem ukośnym. Prędkość v_1 rozkładamy na składowe

v_{1x} - prędkość w kierunku poziomym

v_{1y} - prędkość w kierunku pionowym

$$v_{1x} = v_1\cos\alpha = \frac{2}{3}\sqrt{2gh} = \frac{2}{3}\sqrt{2gR\left(1 - \frac{2}{3}\right)} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gR}$$

$$v_{1y} = v_1\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{2gh} = \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gR}$$

Obliczamy czas spadania ciała z wysokości *H*

$$\frac{gt_s^2}{2} + v_{1y}t_s = H$$

$$\frac{gt_s^2}{2} + v_{1y}t_s - H = 0$$

$$\Delta = v_{1y}^2 + 4\cdot\frac{g}{2}H = v_{1y}^2 + 2gH$$

$$t_s = \frac{-v_{1y} \pm \sqrt{v_{1y}^2 + 2gH}}{g}$$

$$Z_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}R \qquad Z_2 = v_{1x}\cdot t_s \qquad Z = Z_1 + Z_2$$

10. Punkt materialny porusza się po prostej przebywa drogę $s = av^2 - b$ (gdzie a, b - stałe, v - prędkość)
Obliczyć czas po jakim prędkość punktu stanie się dwa razy większa od prędkości początkowej. Dla $t_0=0$ $s_0=0$

Równanie $s = av^2 - b$ różniczkujemy względem czasu

$$\frac{ds}{dt} = 2av\frac{dv}{dt}$$

Ponieważ $\frac{ds}{dt} = v$ więc równanie przyjmuje postać

$$v = 2av\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{1}{2a} = \frac{dv}{dt}$$

Rozdzielmy zmienne

$$\frac{1}{2a}dt = dv$$

Całkujemy stronami

$$\int \frac{1}{2a}dt = \int dv$$

$$v = \frac{1}{2a}t + C$$

Stałą całkową wyliczamy na podstawie warunków początkowych $s_0=0$; $t_0=0$

$$0 = av_0^{\,2} - b$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Stąd ostatecznie

$$v = \frac{1}{2a}t + \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Szukany czas wyznaczamy również z warunków początkowych

$$\frac{v(t)}{v(0)} = 2$$

$$\frac{v = \frac{1}{2a}t + \sqrt{\frac{b}{a}}}{\sqrt{\frac{b}{a}}} = 2$$

$$t_x = 2\sqrt{ab}$$

11. Cząstka porusza się w dodatnim kierunku osi *OX*. Jej prędkość v zależy od x i określona jest wzorem $v = kx$, gdzie k - dodatni współczynniki. Wyznaczyć:

- Zależność prędkości v i przyspieszenia a od czasu
- Średnią prędkość cząstki w czasie, w którym przebędzie ona pierwszych s metrów drogi.

  Przyjąć $x(t = 0) = x_0$

1)

Obliczamy zależność prędkości v od czasu. Korzystamy przy tym z definicji prędkości dla cząstki poruszającej się wzdłuż osi *OX*:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Po uwzględnieniu informacji podanej w treści zadania nasze równanie różniczkowe przyjmie taką postać:

$$kx = \frac{dx}{dt}$$

Rozwiązując je otrzymujemy

$$\int k dt = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln x = kt + C$$

Stałą C wyliczamy, korzystając ze znanych wartości początkowych. A więc zależność $x(t)$ wyraża się wzorem:

$$C = \ln x_0$$

Po przekształceniu można zapisać:

$$x = x_0 e^{kt}$$

Teraz korzystając z definicji prędkości obliczamy zależność $v(t)$:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx_0 e^{kt}}{dt} = x_0 k e^{kt}$$

Zależność przyspieszenia a od czasu znajdziemy korzystając z definicji przyspieszenia

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dx_0 k e^{kt}}{dt} = x_0 k^2 e^{kt}$$

2)Obliczamy prędkość średnią $v_{śr}$ na drodze pierwszych s metrów od chwili t=0. Aby to zrobić skorzystamy z definicji prędkość średniej

$$v_{śr} = \frac{s}{t_s}$$

Gdzie t_s - czas w jakim cząstka pokonała s metrów od chwili $t = 0$, zaś droga $s = x(t_s) - x_0$

Przy obliczaniu czasu t_s skorzystamy z zależności x od t

$$\frac{s + x_0}{x_0} = e^{kt_s}$$

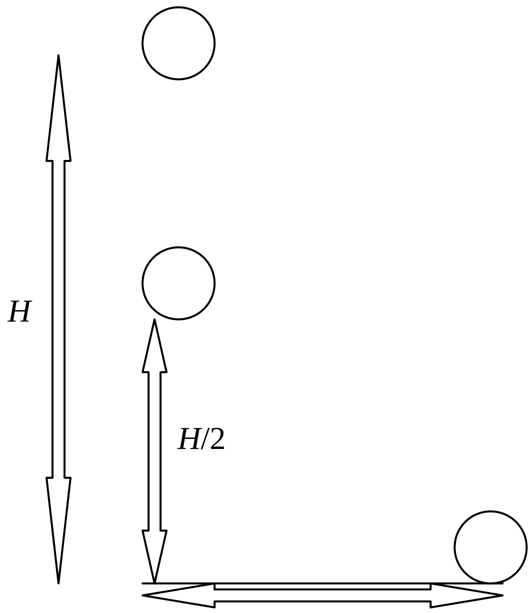
Po logarytmowaniu stronami dostajemy

$$t_s = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{s + x_0}{x_0}\right)$$

Zatem ostatecznie prędkość średnia wynosi

$$v_{śr} = \frac{sk}{\ln\left(\frac{s + x_0}{x_0}\right)}$$

12. Do kuli spadającej z wysokości *H* , w chwili gdy przelatuje ona koło okna znajdującego się na wysokości ½ H, strzelono z karabinu w kierunku poziomym. Pocisk ugrząazł w środku kuli.
W jakiej odległości od ściany i z jaką prędkością kula spadnie na ziemię? Pocisk jest 10 razy lżejszy od kuli, jego prędkość wynosi v_0.



M – masa kuli
$M = 0{,}1\ M$ – masa pocisku
$M = 10m$

a) Obliczamy prędkość kuli w kierunku pionowym na wysokości $H/2$ przed zderzeniem z pociskiem.

$$Mg\frac{H}{2} = \frac{MV_{oy}^2}{2}$$

$$V_{0y} = \sqrt{gH}$$

Zderzenie pocisku z kulą jest idealnie niesprężyste (pocisk grzęźnie w kuli). Spełniona jest zasada zachowania pędu w kierunku poziomym (OX) i pionowym (OY). Możemy zatem napisać dwa równania:

$$OX: mV_0 = (m+M)V_{1x}$$

$$OY: MV_{oy} = (m+M)V_{1y}$$

$$V_{1x} = \frac{mV_0}{m+M} = \frac{mV_0}{11m} = \frac{V_0}{11}$$

$$V_{1y} = \frac{MV_{oy}}{m+M} = \frac{10m}{11m}\sqrt{gH} = \frac{10}{11}\sqrt{gH}$$

V_{1X} – prędkość kuli w kierunku OX z wbitym pociskiem na wysokości H/2
V_{1y} – prędkość kuli w kierunku OY z wbitym pociskiem na wysokości H/2

b) Obliczamy czas spadania (t_s) kulki z wysokości $H/2$. Drogę w kierunku pionowym kula z wbitym pociskiem przebywa ruchem jednostajnie przyspieszonym z prędkością początkową V_{1y}.

$$\frac{H}{2} = V_{1y} \cdot t_s + \frac{g t_s^2}{2}$$

$$\frac{g t_s^w}{2} + V_{1y} \cdot t_s - \frac{H}{2} = 0 / \cdot 2$$

Jest to równanie typu $ax^2 + bx + c = 0$

a= g/2 b= V_{1y} c= -H/2

$$\Delta = b^2 - 4ac = V_{1y}^2 + 4 \cdot \frac{g}{2} \cdot \frac{H}{2} = V_{1y}^2 + gH$$

$$t_{s1} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad t_{s1} = \frac{-V_{1y} + \sqrt{V_{1y}^2 + gh}}{g}$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$t_{s2} = \frac{-V_{1y} + \sqrt{V_{1y}^2 + gH}}{g} = \frac{-\frac{10}{11}\sqrt{gH} + \sqrt{\frac{221}{100} gH}}{g} = \frac{-\frac{10}{11}\sqrt{gH} + \sqrt{\frac{221}{121} gH}}{g}$$

Obliczamy odległość z (odległość od wieży do miejsca w którym kula zderzy się z ziemią)

$$z = A_{sz} \cdot V_{1x} = \frac{-\frac{10}{11}\sqrt{gH} + \frac{\sqrt{221}}{11}\sqrt{gH}}{g} \cdot \frac{V_0}{11}$$

c) Prędkość kuli najłatwiej znaleźć z zasady zachowania energii:

$E_{kB} -$ energia kinetyczna w punkcie *B*

$E_{pB} -$ energia potencjalna w punkcie *B*

$E_{kC} -$ energia kinetyczna w punkcie *C*

$$E_{kB} + E_{pB} = E_{kc}$$

$$(m+M) \cdot \frac{V_{1x}^2 + V_{1y}^2}{2} + (m+M) g \frac{H}{2} = (m+M) \frac{V_z^2}{2}$$

$$11m \left(\frac{\frac{V_0^2}{121} + \frac{100}{121} gH + gH}{2} \right) = 11m \frac{V_z^2}{2}$$

$$\frac{V_0^2}{121} + \frac{221}{121} gH = V_2^2$$

$$V_2 = \frac{\sqrt{V_0^2 + 221 gH}}{11}$$

13. Punkt materialny porusza się po prostej z przyspieszeniem a określonym wzorem $a = -kv$, gdzie k jest dodatnim współczynnikiem. Dla $t = 0$ prędkość $v = v_0$. Jaką drogę przebędzie punkt do momentu zatrzymania się. W jakim czasie przebędzie on drogę s?

Korzystając z definicji przyspieszenia a w ruchu prostoliniowym, otrzymujemy:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Wstawiając do tego wzoru zależność podaną w treści zadania, otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{dv}{dt} = -kv$$

Przyspieszenie jest skierowane przeciwnie do prędkości (znak minus po prawej stronie), a więc mamy do czynienia z ruchem opóźnionym. Przejdźmy teraz do rozwiązania tego równania:

$$\frac{dv}{v} = -kdt$$

$$\int \frac{dv}{v} = -k\int dt$$

$$\ln v = -kt + C$$

Stałą całkowania C obliczamy, korzystając z faktu, iż znamy warunki początkowe $C = \ln v_0$

A po przekształceniu wyrażenia otrzymujemy ostateczną zależność prędkości od czasu

$$v = v_0 e^{-kt}$$

Zależność drogi od czasu wyznaczamy w podobny sposób. Przekształcając wzór pokazujący definicję prędkości, całkując go stronami i na końcu wyliczając wartość stałej całkowania.

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\int ds = v_0 \int e^{-kt} dt$$

$$x = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C$$

$$C = \frac{v_0}{k}$$

Ostatecznie

$$x = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

Aby punkt zatrzymał się jego prędkość musi być zerowa. A więc, jak wynika z otrzymanej powyżej zależności warunek ten jest spełniony. gdy t dąży do nieskończoności, zatem jeśli obliczymy granicę przy t dążącym d nieskończoności z zależności $x(t)$ dostaniemy drogę, jaką przebędzie punkt do momentu zatrzymania się

$$\lim_{t\to\infty} \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) = \frac{v_0}{k}$$

Czas t_s potrzebny na przebycie drogi s obliczymy z zależności

$$s = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt_s}\right)$$

A ostatecznie

$$t_s = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{v_0}{v_0 - ks}\right)$$

14. Znaleźć prędkość i przyspieszenie w ruchu opisanym równaniami:

$$x = A\cos\left(Bt^2\right)$$

$$y = A\sin\left(Bt^2\right)$$

gdzie A, B to stałe. Znaleźć równanie toru. Jaki to rodzaj ruchu?

Równania ruchu podane w zadaniu świadczą o tym, iż ruch ten odbywa się na płaszczyźnie. Równanie jego toru otrzymamy po wyrugowaniu czasu z obu równań. Kiedy podniesiemy oba równania do kwadratu i dodamy stronami dostaniemy

$$x^2 + y^2 = A^2 cos^2\left(Bt^2\right) + A^2 sin^2\left(Bt^2\right) = A^2\left[cos^2\left(Bt^2\right) + sin^2\left(Bt^2\right)\right] = A^2$$

Powyższe równanie jest równaniem okręgu o promieniu A i środku w początku układu współrzędnych. Pozostaje teraz tylko wyznaczyć współrzędne prędkości i przyspieszenia, aby dowiedzieć się, jaki to rodzaj ruch.

$$x = A\cos\left(Bt^2\right)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dA\cos\left(Bt^2\right)}{dt} = -2ABt\sin\left(Bt^2\right)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 2ABt\cos\left(Bt^2\right)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -2ABt\sin\left(Bt^2\right) - 4AB^2t^2\cos\left(Bt^2\right)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2ABt\cos\left(Bt^2\right) - 4AB^2t^2\sin\left(Bt^2\right)$$

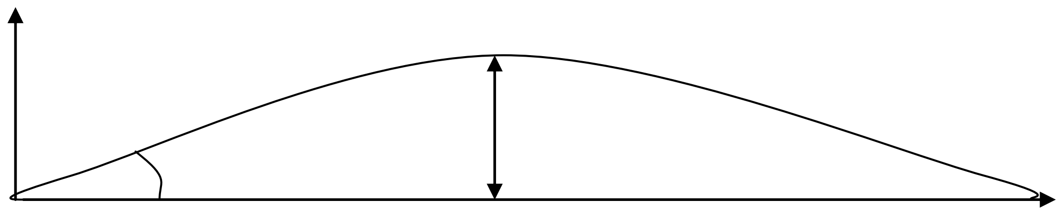
Teraz policzmy wartości przyspieszenia i prędkości

$$v = \sqrt{v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2}} = 2ABt$$

$$a = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2}} = \sqrt{4A^2B^2t^2 + 16A^2B^4t^4} = 2ABt\sqrt{1 + 4t^2B^2}$$

A więc podane w zadaniu zależności dotyczą ruchu zmiennego po okręgu.

15. Ciało zostało wyrzucone pod kątem *α* z prędkością v_0. Zakładamy, że ruch odbywa się bez oporu.
    Oblicz:
    a) maksymalną wysokość h_{max} na jaką wzniesie się ciało
    b) zasięg rzutu
    c) dla jakiego *α* zasięg będzie największy
    d) wyznacz równania ruchu



Zjawisko rzutu ukośnego możemy rozpatrzeć jako złożenie ruchu pionowego i poziomego.
$V_{ox} = V_0 \cdot \cos\alpha$ - prędkość pozioma wzdłuż osi OX; Prędkość ta jest stała.
$V_{oy} = V_0 \cdot \sin\alpha$ -prędkość pionowa wzdłuż osi OY; Prędkość ta będzie się zmieniała w czasie zgodnie z równaniem $V_y = V_{0y} - gt$

a) Obliczenie h_{max}
Ciało wznosi się jeżeli $V_y(t) > 0$. Ciało przestanie się wznosić jeżeli $V_y(t) = 0$ stąd obliczamy czas wznoszenia.

$$V_y = V_{0y} - gt$$

$0 = V_0\, sin\alpha - gt_w$, stąd $t_w = \frac{V_0 \sin\alpha}{9}$

Ciało do góry porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym.

$$h_{max} = V_{0y} \cdot t_w - \frac{gt_w^2}{2}$$

$$h_{\max} = V_0 \sin\alpha \cdot \frac{V_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 =$$

$$= \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}\right) = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

b) Obliczanie zasięgu

Czas spadania jest równy czasowi wznoszenia.

$$t_s = t_w = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

Można to udowodnić. Ciało spada z wysokości h_{max} ruchem jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej.

$$h_{\max} = \frac{gt_s^2}{2}$$

$$\frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{g}{2} t_s^2 \text{ stąd } t_s^2 = \frac{2}{9} \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

$$t_s = \frac{\sqrt{V_0^2 \sin^2\alpha}}{g^2} = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

z - zasięg

W kierunku poziomym mamy do czynienia z ruchem jednostajnym, z prędkością $V_{0x} = V_0 \cdot \cos\alpha$. Przy czym trwa on przez cały czas, kiedy ciało znajduje się w powietrzu (t_w+t_s).

$$z = V_{0x}(t_w + t_s)$$

$$z = V_0 \cos\alpha \left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g} + \frac{V_0 \sin\alpha}{g} \right) = \frac{2V_0}{g} \sin\alpha \cos\alpha$$

c)Zasięg maksymalny

Musimy skorzystać ze wzoru: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $z = \frac{v_0}{g}\sin 2\alpha$.

Funkcja sinus osiąga maksymalną wartość 1 dla $2\alpha = 90^\circ (\frac{\pi}{2})$ czyli $\alpha = 45^\circ (\frac{\pi}{4})$

d)równanie ruchu

W kierunku poziomym położenie ciała zmienia się. $x = V_{0x} \cdot t = V_0 \cos\alpha \cdot t$ (1)

W kierunku pionowym: $y = V_{0y} \cdot t - \frac{gt^2}{2} = V_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$ (2)

Z równania (1) wyznaczamy czas $t = \frac{x}{V_0 \cdot \cos\alpha}$ i wstawiamy do równania (2).

$$y = V_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{V_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{V_0 \cos\alpha}$$

$$y = -\frac{g}{2V_0 \cos\alpha} \cdot x^2 + V_0 tg\alpha \cdot x$$

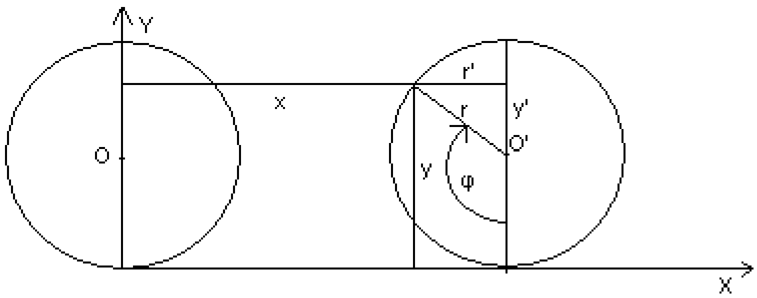
Jest to równanie paraboli. Ponieważ współczynnik przy x^2 jest ujemny więc ramiona skierowane są w dół.

16. Koło o promieniu *r* toczy się ruchem jednostajnym z prędkością kątową ω po prostej. Zbadaj ruch dowolnego punktu *P* leżącego na obwodzie koła. Podać zależność prędkości *v* i drogi przebytej *s* przez ten punkt od czasu *t*.

Rozwiązanie tego zadania trzeba zacząć od właściwego wyboru układu współrzędnych. Obierzmy układ, gdzie oś *OX* jest prostą, po której toczy się koło a oś *OY* wyznacza położenie początkowe koła. Ponieważ koło toczy się prędkością kątową ω, to jego środek *O'* porusza się z prędkością liniową $v = \omega r$. W dowolnym czasie *t* środek koła przebywa zatem drogę równą $vt = \omega rt$. W wybranym układzie odniesienia współrzędne *x* i *y* punktu *P* wyrażają się wzorem

$$x = \omega rt - x'$$

$$y = r + y'$$



Gdzie x' i y' są współrzędnymi punktu *P* w układzie współrzędnych, którego środek znajduje się w środku koła. Ich wartości określają wzory

$$\frac{x'}{r} = \sin(180 - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\frac{y'}{r} = \cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$$

gdzie α jest kątem jaki zakreśli promień łączący punkt *P* ze środkiem koła w czasie *t* i wynosi ωt. Po przekształceniu otrzymujemy:

$$x' = r\sin\omega t$$

$$y' = -r\cos\omega t$$

Wstawiając powyższe równania do równań ruchu, zmieniamy ich postać na

$$x = r(\omega t - \sin\omega t)$$

$$y = r(1 - \cos\omega t)$$

Aby wyznaczyć tor ruchu najprościej wyznaczyć z drugiego równania $\cos\omega t$

$$\cos\omega t = \frac{r - y}{y}$$

oraz ωt

$$\omega t = \arccos\frac{r - y}{y}$$

a potem wstawić do równania pierwszego. Po skorzystaniu z przekształcenia

$$\sin\omega t = \sqrt{1 - \cos^2\omega t}$$

otrzymujemy równanie toru

$$x - = -\sqrt{y(2r - y)} + r\arccos\frac{r - y}{y}$$

Jest to równanie cykloidy

Skoro już znamy równanie ruchu, wyznaczenie wartości prędkości punktu *P* sprowadza się do obliczenia jej składowych i dodaniu ich wektorowo. A więc

$$v_x = \frac{dx}{dt} = r\omega - r\omega\cos\omega t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = r\omega\sin\omega t$$

Dodając v_x i v_y wektorowo otrzymujemy

$$v = \sqrt{2}r\omega\sqrt{1-\cos\omega t}$$

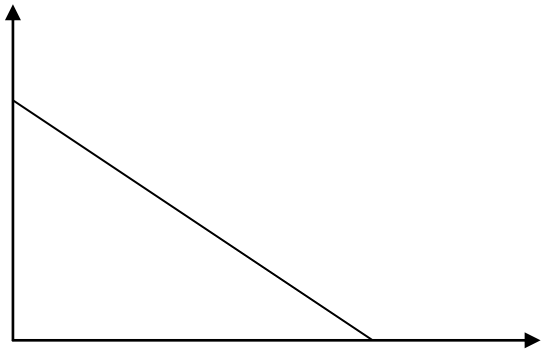
Przekształcając wyżej podany wzór sprowadzamy go do postaci

$$v = 2r\omega\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

Drogę przebytą przez punkt *P* w czasie *t* obliczamy z definicji:

$$s = \int_0^t v\,dt = \int_0^t 2r\omega\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)dt = 2r\omega\left(\frac{-2}{\omega}\right)\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\Bigg|_0^t = 4r\left(1-\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right)$$

17. Odcinek *AB* o stałej długości porusza się tak, że jego punkty końcowe *A* i *B* ślizgają się po osiach *Y* i *X* pewnego układu współrzędnych *OXY*. Wyznacz tor, jaki będzie zakreślał dowolnie obrany punkt *C* leżący na odcinku *AB*.



(1) $$\frac{x}{a} = \cos\alpha$$

$$\frac{y}{b} = \sin\alpha$$

Podnosząc równania (1) stronami do kwadratu otrzymujemy:

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2\alpha$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha$$

Dodając je stronami otrzymamy:

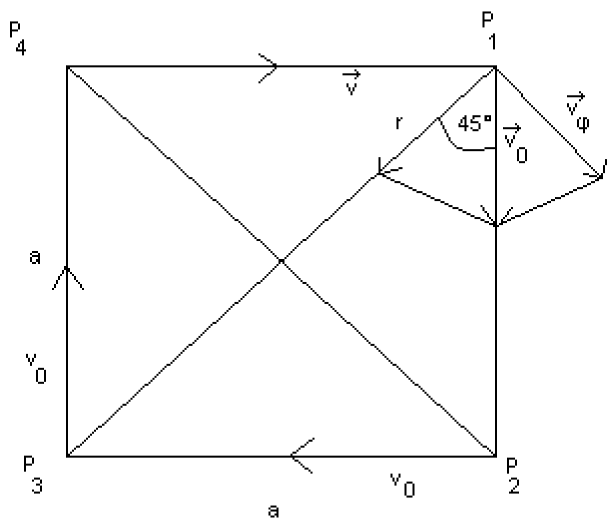
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Jest to równanie elipsy. Ostatecznie możemy powiedzieć, że punkt *C* porusza się po elipsie o półosiach *a* i *b*.

17. W czterech rogach kwadratowego sufitu o boku *a* znajdują się cztery pająki. W pewnej chwili każdy pająk zaczyna gonić pająka przed sobą. Każdy pająk porusza się z prędkością v_0 skierowaną wzdłuż prostej łączącej pająka z pająkiem poprzedzającym go. Znajdź:

- Równania ruchu dowolnego pająka
- Czas ruchu
- Równanie toru

Rozwiązanie to trzeba zacząć od wyboru właściwego układu odniesienia tzn. takiego, dla którego nasze rozważania będą najprostsze. Skoro pająki cały czas będą w ruchu, to linia łącząca będzie zmieniała swój kierunek o pewien kąt. Zatem możemy podejrzewać, iż układ współrzędnych biegunowych pozwoli tutaj na najprostsze rozwiązanie. Zatem przejdźmy to rozwiązywania zadania w tym właśnie układzie współrzędnych.



1) Położenie pająków w chwili początkowej przedstawione jest na rysunku powyżej. W tej też chwili pająk p_1 zaczyna poruszać się w kierunku pająka p_2 z prędkością v_0, pająk p_2 w kierunku p_3 itd. Aby wyznaczyć równania ruchu któregokolwiek z tych pająków we współrzędnych biegunowych należy znaleźć zależności $r = r(t)$i $\omega = \omega$ (t), które będą nam mówiły o położeniu pająków względem środka sufitu. W celu wyznaczenia tych zależności rozłóżmy wektor prędkości v_0 na składowe - radialną skierowaną do środka sufitu i prostopadła do niej transwersalną. Skoro znamy wartość prędkości v_0 możemy wyznaczyć wartości obu tych składowych, zatem

$$\frac{v_r}{v_0} = \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow v_r = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0$$

$$\frac{v_\alpha}{v_0} = \sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow v_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0$$

Skorzystamy teraz z definicji obu tych prędkości w układzie biegunowym

$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

$$v_\alpha = r\frac{d\alpha}{dt}$$

Jeśli przyrównamy do siebie wzory na prędkość transwersalną i radialną otrzymane z naszych rozważań do definicji tych prędkości otrzymamy dwa równania różniczkowe. Nie można, jednak pominąć faktu, że wektor prędkości v_r ma przeciwny zwrot do wektor położenia, co będzie owocowało minusem w pierwszym wzorze.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}v_0 = -\frac{dr}{dt}$$

$$r\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0$$

Przystąpmy do ich rozwiązywania a zacznijmy od pierwszego z nich

$$\frac{\sqrt{2}}{2}v_0 dt = dr$$

$$\int \frac{\sqrt{2}}{2}v_0 dt = \int dr$$

$$r = -\frac{\sqrt{2}}{2}v_0 t + C$$

Stałą całkowania możemy wyliczyć na podstawie warunków początkowych.

$$C = \mathrm{a}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zatem zależność r(t) ma postać

$$r = -\frac{\sqrt{2}}{2}v_0 t + a\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - v_0 t)$$

Zajmijmy się teraz rozwiązaniem drugiego równania różniczkowego. Aby otrzymać zależność alfa od t podstawmy do niego wyliczoną już wcześniej zależność r(t) i zastosujmy te samą metodę co przy rozwiązywaniu równania pierwszego.

$$d\alpha = \frac{dt}{\frac{a}{v_0} - t}$$

$$\int d\alpha = \int \frac{dt}{\frac{a}{v_0} - t}$$

$$\int \frac{dt}{\frac{a}{v_0} - t} = \left| \begin{matrix} x = \frac{a}{v_0} - t \\ dx = -dt \end{matrix} \right| = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x + C$$

$$\alpha = -\ln\left(\frac{a}{v_0} - t\right) + C$$

Tak samo jak ostatnio wyliczamy, korzystając ze znajomości warunków początkowych

$$C = \ln\left(\frac{a}{v_0}\right)$$

I ostatecznie otrzymujemy

$$\alpha = -\ln\left(\frac{a}{v_0} - t\right) + \ln\left(\frac{a}{v_0}\right) = -\ln\left(1 - \frac{v_0 t}{a}\right)$$

2) Żeby obliczyć czas ruchu dowolnego pająka trzeba zauważyć, że pająki będą się poruszać do momentu aż spotkają się na środku sufitu. A skoro tak to promień wodzący przyjmie wtedy wartość równą 0. Jeśli przyrównamy tę wartość z zależnością r(t), jedyną wartością spełniającą ten warunek będzie czas, którego szukamy.

$$0=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a-v_0 t_s\right)\Rightarrow t_s=\frac{a}{v_0}$$

3) Szukany tor ruchu dowolnego pająka otrzymamy po wyrugowaniu z naszych równań czasu. Aby do tego doszło przekształćmy nasze alfa od t

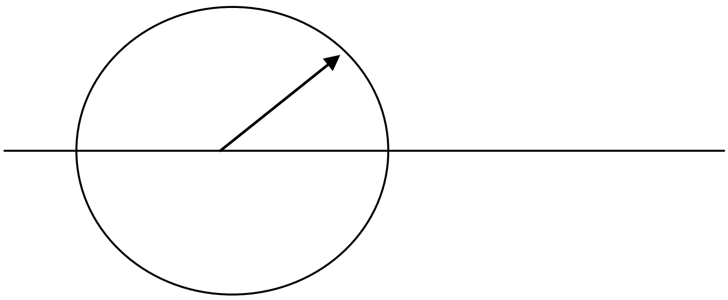
$$a-v_0 t=ae^{-\alpha}$$

I podstawmy do równania r(t). Otrzymamy wtedy równanie toru

$$r=\frac{\sqrt{2}}{2}ae^{-\alpha}$$

Jest to równanie spirali.

18. Kula o promieniu R pływa w cieczy o gęstości ρ, przy czym zanurzona jest do połowy swej objętości. Jaką pracę wykonać, aby wydobyć kulę nad poziom cieczy?



Objętość zanurzonej kuli obliczamy ze wzoru:

$$V=\pi\int_{R-y}^{R}x^2\,dy=\pi\int_{R-y}^{R}\left(R^2-y^2\right)dy$$

$$=\left[\pi\left(R^2y-\frac{y^3}{3}\right)\right]_{R-y}^{R}=\pi Ry^2-\frac{1}{3}\pi y^3$$

Pracę potrzebną na wyciągnięcie kuli obliczymy ze wzoru:

$$w=\int_0^R\left(Q-V\rho g\right)dy$$

q- ciężar kuli

v- objętość zanurzonej części kuli

$$w=\int_0^R\left(Q-\left(\pi Ry^2-\frac{1}{3}\pi y^3\right)\rho g\right)dy=$$

$$=\left(Qy-\left(\pi R\frac{y^3}{3}-\frac{1}{12}\pi y^4\right)\rho g\right)_0^R=$$

$$=QR-\left(\frac{1}{3}\pi R^4-\frac{1}{12}\pi R^4\right)\rho g=$$

$$=QR-\frac{1}{4}\pi R^4\rho g$$

Z treści zadania wynika, że ciężar kuli wynosi:

$$Q=\frac{2}{3}\pi R^3\rho g\ .$$

Zatem praca wynosi:

$$w=\frac{5}{12}\pi R^4\rho g$$

19. W pewnym momencie na jadący samochód zaczyna działać siła hamująca, proporcjonalna do prędkości $F = -kv$, k - stała.
    - Znaleźć zależność prędkości samochodu od czasu
    - Obliczyć, jaką drogę pokona samochód do chwili zatrzymania się?

    Przyjąć, że w chwili początkowej samochód poruszał się z prędkością v_0 i przebył drogę $s_0 = 0$. Masa samochodu m.

W przypadku tego samochodu równanie ruchu będzie miało postać

$$m\frac{dv}{dt} = -kv$$

1) Rozwiązanie tego równania różniczkowego będzie zależnością prędkości od czasu. Zatem zróbmy pierwszy krok na drodze do jego otrzymania. Rozdzielmy zmienne

$$\frac{dv}{v} = \frac{-k}{m}dt$$

Całkujemy stronami

$$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{-k}{m}dt$$

Otrzymamy wtedy

$$\ln v = \frac{-k}{m}t + C$$

Gdzie stała C jest stałą całkowania, aby ją wyliczyć skorzystajmy ze znajomości warunków początkowych

$$C = \ln v_0$$

A więc ostatecznie

$$\ln v = \frac{-k}{m}t + \ln v_0 \Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = \frac{-k}{m}t$$

Po prostym przekształceniu wykorzystującym definicję logarytmu dostajemy zależność

$$\boldsymbol{v = v_0 e^{\frac{-k}{m}t}}$$

2) W tej części zadania skorzystamy z definicji prędkości

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Wstawimy otrzymaną w podpunkcie pierwszym zależność na prędkość do wzoru powyżej a potem tok rozwiązania będzie przebiegał tak samo, jak w podpunkcie pierwszym

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{\frac{-k}{m}t}$$

$$\int dx = \int v_0 e^{\frac{-k}{m}t}dt$$

$$x = \frac{-v_0 m}{k}e^{\frac{-k}{m}t} + C$$

Wyliczamy stałą C

$$\frac{-v_0 m}{k} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{v_0 m}{k}$$

Zatem ostatecznie zależność drogi od czasu ma postać

$$x = \frac{-v_0 m}{k} e^{\frac{-k}{m}t} + \frac{v_0 m}{k} = \frac{v_0 m}{k}\left(1 - e^{\frac{-k}{m}t}\right)$$

A wyliczyć drogę jaką ciało pokona do chwili zatrzymania się trzeba zauważyć, iż nastąpi to po nieskończenie długim czasie zatem droga s, jaką przebędzie ciało do chwili zatrzymania się równa będzie granicy przy czasie dążącym do nieskończoności z x(t)

$$\lim_{t \to \infty} \frac{v_0 m}{k}\left(1 - e^{\frac{-k}{m}t}\right) = \frac{v_0 m}{k}$$

A więc droga ta będzie wynosiła

$$s = \frac{v_0 m}{k}$$

20. Na ciało o masie *m* działa siła oporu $F = -kv^2$. Jaką drogę pokona ciało do momentu, gdy jego prędkość zmniejszy się o połowę?
    Przyjąć, że w chwili kiedy zaczęła działać siła *F* ciało poruszało się z prędkością v_0 i pokonało drogę $s_0 = 0$.

Rozwiązanie tego zadania trzeba zacząć od napisania równania ruchu dla ciała, o którym mowa w zadaniu. Podstawiając za przyspieszenie jego definicję równanie to przyjmie postać

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

Jeśli rozwiążemy to równanie uzyskamy zależność prędkości od czasu, która pozwoli nam na wyliczenie wartości czasu po jakim prędkość będzie wynosiła połowę prędkości początkowej v_0. Równanie to możemy rozwiązać metodą rozdzielenia zmiennych. A więc na początku przekształćmy odpowiednio równanie

$$\frac{dv}{v} = \frac{-k}{m}dt$$

Następnie otrzymane równanie całkujemy

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{-k}{m}dt$$

I dostajemy

$$\frac{-1}{v} = \frac{-k}{m}t + C$$

Gdzie C jest stałą całkowania, którą możemy wyliczyć korzystając ze znajomości warunków początkowych

$$C = -\frac{1}{v_0}$$

Zatem zależności prędkości od czasu dla tego ciała będzie miała postać

$$\frac{-1}{v} = \frac{-k}{m}t + -\frac{1}{v_0} \Rightarrow v = \frac{1}{\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0}}$$

Teraz obliczmy czas, po którym prędkość ciała zmaleje do połowy

$$\frac{v_0}{2} = \frac{1}{\frac{k}{m}t_s + \frac{1}{v_0}}$$

Dostajemy

$$t_s = \frac{m}{kv_0}$$

Skoro już dysponujemy wartością czasu, po którym prędkość spadnie do połowy swojej wartości, jedyne co nam zostaje, to wyznaczyć wartość drogi od czasu, a następnie wstawić obliczony czas do tego wzoru. Aby obliczyć zależność $x(t)$ skorzystamy z definicji prędkości

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Za v wstawimy wyliczoną przez nas wyżej wartość $v(t)$ a następnie rozwiążemy otrzymane równanie różniczkowe tą samą metodą, jaką wyliczaliśmy zależność $v(t)$. A więc

$$\frac{1}{\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0}} = \frac{dx}{dt}$$

$$\int \frac{dt}{\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0}} = \int dx$$

$$\int \frac{dt}{\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0}} = \left| \begin{array}{l} a = \frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0} \\ da = \frac{k}{m}dt \end{array} \right| = \int \frac{m}{k}\frac{da}{a} = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0}\right) + D$$

$$x = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0}\right) + C$$

Wyliczamy stałą C

$$0 = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{k}{m}\cdot 0 + \frac{1}{v_0}\right) + C \Rightarrow C = -\frac{m}{k}\ln\left(\frac{1}{v_0}\right)$$

No i ostatecznie otrzymujemy

$$x = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0}\right) - \frac{m}{k}\ln\left(\frac{1}{v_0}\right) = \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{kv_0}{m}t\right)$$

Wstawiamy wyliczoną wartość t1/2 do zależności s(t) i dostajemy

$$s = \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{kv_0}{m}\cdot\frac{mk}{v_0}\right)$$

A po przekształceniach

$$s = \frac{m}{k}\ln(2)$$