Zadania problemowe z elektromagnetyzmu

Zadania z rozwiązaniami

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

Na przewodnik z prądem znajdujący się w polu magnetycznym działa siła, która może spowodować przesunięcie tego przewodnika, co wiąże się z wykonaniem pewnej pracy. Siła działająca na przewodnik jest sumą sił Lorentza działających na ładunki biorące udział w przepływie prądu. Jednocześnie wiadomo, że siła Lorentza nie może wykonać pracy nad ładunkiem. Jak wyjaśnić tą sprzeczność?

Rozwiązanie

Pozorna sprzeczność tkwi w nieprecyzyjnym określeniu siły działającej na przewodnik z prądem. W przypadku statycznym (czyli gdy przewodnik się nie porusza), takie określenie prowadzi do prawidłowego wyrażenia na siłę, jednak nie można go uogólniać na przypadek ruchu przewodnika.

Właściwe określenie siły działającej na przewodnik w polu magnetycznym powinno opierać się na analizie zderzeń elektronów swobodnych z jonami sieci. Siła Lorentza powoduje, że między kolejnymi zderzeniami elektrony poruszają się po torach zakrzywionych, dlatego też uśredniony przekaz pędu Δp jest prostopadły do przewodnika. Siła działająca na przewodnik jest więc wynikiem działania siły Lorentza, ale nie można w ogólnym przypadku traktować jej jako prostej sumy sił Lorentza działających na poszczególne ładunki.

Żeby zilustrować tą różnicę, rozpatrzmy siłę działającą na prosty przewodnik ślizgający się bez tarcia po równoległych poziomych szynach. Do szyn dołączone jest źródło napięcia zapewniające przepływ prądu w obwodzie, a cały układ znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym B. Przez v oznaczmy prędkość przewodnika (wynikającą z oddziaływania z polem) a v_d prędkością unoszenia (dryfu) elektronów w przewodniku.

Siła działająca na ten przewodnik wynika zarówno z prędkości v, jaki i v_d.

$$\vec{F} = eN\left[\left(\vec{v} + \vec{v}_d\right) \times \vec{B}\right]$$

gdzie e jest ładunkiem elektronu, a N ilością elektronów w przewodniku, biorącą udział w przepływie prądu. W czasie dt siła ta wykonuję pracę:

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F}\left(\vec{v} + \vec{v}_d\right)dt = eN\left[\left(\vec{v} + \vec{v}_d\right) \times \vec{B}\right]\left(\vec{v} + \vec{v}_d\right)dt = \\ &= eN\left[\left(\vec{v}_d \times \vec{B}\right)\vec{v}_d + \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\vec{v}_d + \left(\vec{v}_d \times \vec{B}\right)\vec{v} + \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\vec{v}\right]dt \end{aligned}$$

Wektory B, v i v_d są wzajemnie prostopadłe, z czego wynika, że

$$\begin{aligned} \left(\vec{v}_d \times \vec{B}\right)\vec{v}_d &= \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\vec{v} = 0 \\ \left(\vec{v}_d \times \vec{B}\right)\vec{v} &= -\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\vec{v}_d \end{aligned}$$

Podstawiając powyższe związki do równania na pracę, uzyskujemy wynik równy 0 (zgodnie z faktem, że siła Lorentza nie wykonuje pracy). Zwróćmy jednak uwagę na dwa nieznikające iloczyny i związane z nimi składniki pracy

$$\begin{aligned} dW_1 &= eN\left[\left(\vec{v}_d \times \vec{B}\right)\vec{v}\right]dt \\ dW_2 &= -eN\left[\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\vec{v}_d\right]dt \end{aligned}$$

Zauważmy, że N=nSl (gdzie n to liczba elektronów w jednostce objętości, S- pole przekroju poprzecznego, a d to długość przewodnika). Ponieważ wektor gęstości prądu $j=env_d$, a dSj=IN, gdzie I –oznacza natężenie prądu pracę dW_1 możemy zapisać jako:

$$dW_1 = I\left(\vec{d} \times \vec{B}\right)\vec{v}dt$$

Z powyższego równania widać, że dW_1 jest pracą siły działającej na przewodnik w polu magnetycznym wykonaną na drodze vdt.

Z drugiej strony, uwzględniając, że

$$d\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)dt = d\Phi_B$$

gdzie Φ_B jest strumieniem pola magnetycznego, możemy napisać

$$dW_2 = -I\frac{d\Phi_B}{dt}dt$$

Widać, że praca dW_2 jest to praca wykonana przez indukowaną siłę elektromotoryczną.

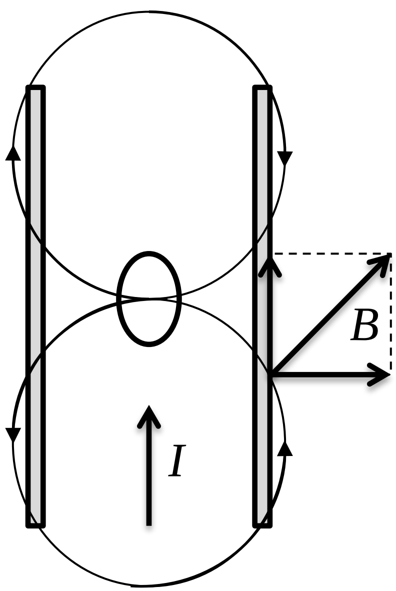
Pomimo więc, że całkowita praca siły F jest, jak należało się spodziewać, zerowa, to niezerowa jest praca wykonana na przesunięcie przewodnika. Sprzeczność jest więc pozorna i wynika z nieprawidłowego założenia, że siła działająca na przewodnik jest sumą sił Lorentza działających na ładunki.

Zadanie 2

Swobodny kontur (pętla) z prądem znajduje się we wnętrzu długiej rury, wzdłuż której płynie prąd. Wiadomo, że prąd płynący wzdłuż ścianek rury, nie wytwarza pola magnetycznego wewnątrz rury. Czy w związku z tym można uważać, że kontur jest w stanie równowagi obojętnej?

Rozwiązanie

Załóżmy, że kontur jest ustawiony tak, że oś rury leży w płaszczyźnie konturu. Pole magnetyczne wytworzone przez kontur ma taką symetrię, że w ściance rury pojawia się niezerowa składowa pola (rysunek).



Ze składową pola magnetyczne w ściance rury związana jest siła Lorentza, która powoduje zakrzywienie toru ładunków i w efekcie pojawienie się prądu okrężnego. Prąd ten wytwarza wewnątrz rury pole magnetyczne, które jest skierowane wzdłuż jej osi. Pole to obraca kontur oddziałując z jego momentem magnetycznym i zmusza do takiego ustawienia aby wektor momentu magnetycznego ustawił się zgodnie z kierunku płynącego w rurze prądu.
Należy zauważyć, że dla odległości dalekich od konturu, indukują się prądy okrężne płynące w przeciwnym kierunku. Jednakże ze względu na dużą odległość ich wpływ jest znikomy w porównaniu z wpływem prądów okrężnych omawianych powyżej.

Zadanie 3

Wiadomo, że prąd o natężeniu I płynący w nieskończenie długim prostoliniowym przewodniku wytwarza wokół siebie pola magnetyczne o natężeniu

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

Energia pola magnetycznego wytwarzanego na zewnątrz odcinka przewodu o długości D jest dana równaniem:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\mu_0\mu\int_V H^2 dV$$

gdzie całkowanie rozciąga po się po całej przestrzeni leżącej na zewnątrz przewodnika i ograniczonej przez dwie równoległe powierzchnie odległe od siebie o d i prostopadłe do przewodnika. Podstawiając powyższe wyrażenie na natężenie pola do wyrażeni na energię i kładąc $dV=2\pi rDdr$ otrzymujemy

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi}\mu_0\mu DI^2\int_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r} = \frac{1}{4\pi}\mu_0\mu DI^2 \ln r\Big|_{r_0}^{\infty}$$

gdzie r_0 oznacza promień przewodnika. Powyższy rezultat oznacza, że każdy, nawet najkrótszy odcinek przewodnika wytwarza pole magnetyczne o nieskończenie wielkiej energii, kosztem skończonej energii potrzebnej na wymuszenie przepływu prądu w przewodniku. Wynik taki jest we sposób oczywisty sprzeczny z podstawowymi zasadami fizyki.

W którym miejscu powyższego rozumowania popełniono błąd?

Rozwiązanie

Błąd przytoczonego rozumowania tkwi w nieprawdziwym założeniu o prawdziwości wyrażenia na natężenie pola w przypadku nieskończonych odległości.

Nieskończenie duża odległość od pewnego obiektu oznacza, że rozmiary kątowe tego obiektu dążą do zera. Rozpatrywanie nieskończonej odległości od nieskończonego przewodnika traci sens, więc wyrażenie $H=I/2\pi r$ dla $r \to \infty$ również przestaje obowiązywać.

Przyczyną jest założenie o nieskończenie długim przewodniku, które leży u podstaw wyprowadzenie wyrażenia $H=I/2\pi r$. Założenie to jest niefizyczne, więc w niektórych przypadkach (takich jak omawiany tutaj) prowadzi do niefizycznych wniosków. Przykład ten podkreśla konieczność dogłębnego zrozumienia ograniczeń wynikających z założeń poczynionych na potrzeby wykorzystanych w rozumowaniu modeli.

Zadanie 4

Naładowany kondensator cylindryczny może obracać się wokół swojej osi symetrii. Wirujący wokół osi cylinder wytwarza, obok pola elektrycznego, również pole magnetyczne. Czy jest możliwe nadanie mu takiej prędkości kątowej, żeby energia pola elektrycznego była równa energii pola magnetycznego?

Rozwiązanie

Kondensator cylindryczny składa się z dwóch naładowanych powierzchni cylindrycznych. Wirowanie równomiernie naładowanej ładunkiem Q powierzchni cylindrycznej jest równoważne jednorodnemu, prądowi okrężnemu. Natężenie tego prądu wynosi

$$I = \frac{\omega}{2\pi} Q$$

gdzie ω jest prędkością kątową wirowania. Przy założeniu, że długość cylindra jest znacznie większa od jego promienia, całe pole magnetyczne jest skupione wewnątrz i jest jednorodne. Natężenie tego pola magnetycznego można wyznaczyć w prosty sposób z prawa Ampere'a i wynosi ono

$$H = \frac{I}{l} = \frac{\omega}{2\pi l} Q$$

gdzie l jest wysokością cylindra.

Ładunki zgromadzone na okładkach kondensatora różnią się jedynie znakiem, co oznacza, że wirujący kondensator jest równoważny dwóm współosiowym prądom o jednakowych natężeniach i odwrotnych kierunkach przepływu

Z powyższego wynika, że w rozpatrywanym przypadku pole magnetyczne zlokalizowane jest jedynie w obszarze między okładkami, a natężenie tego pola pochodzi jedynie od zewnętrznej okładki. Energia pola magnetycznego wynosi:

$$\varepsilon_H = \frac{\mu_0}{2}\int H^2 dV = \frac{\mu_0}{2} H^2 \int dV = \frac{\mu_0 \omega^2}{8\pi l} Q^2\left(r_2^2 - r_1^2\right)$$

Energia pola elektrycznego może być obliczona przy znajomości natężenia pola elektrycznego, które z kolei łatwo wyznaczyć z twierdzenia Gaussa:

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l r}$$

Energia tego pola wynosi

$$\varepsilon_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 dV = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}dr = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Porównanie energii obu pól prowadzi do warunku na prędkość kątową:

$$\omega^2 = \frac{2\ln\left(r_2/r_1\right)}{\varepsilon_0\mu_0\left(r_2^2 - r_1^2\right)}$$

Zastanówmy się nad fizyczną interpretacją powyższego wyniku.

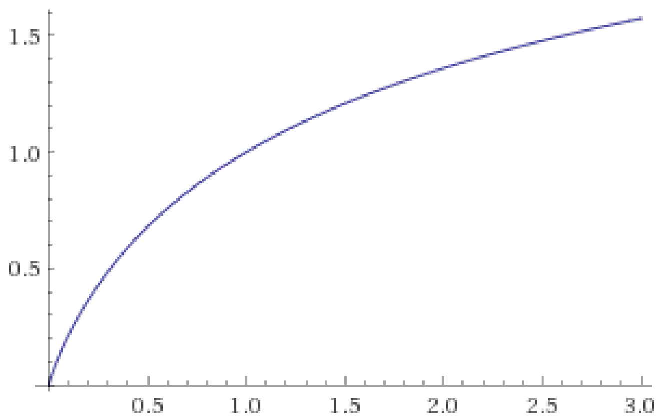
Prędkość liniowa punktów należących do zewnętrznej okładki jest iloczynem jej promienia i prędkości kątowej kondensatora. Kładąc $x=r_2/r_1$ oraz wykorzystując związek między stałymi μ_0 i ε_0 a prędkością światła w próżni c

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

mamy:

$$v = \omega r_2 = c\sqrt{\frac{2x^2 \ln x}{x^2 - 1}} \equiv cf(x)$$

Rozważmy sens fizyczny powyższego wyrażenia, w szczególności funkcji f(x), której wykres zamieszczono poniżej. Funkcja ta ma sens fizyczny jedynie dla zakresu argumentu x>1 (gdy zewnętrzna okładka ma większy promień niż okładka wewnętrzna). Dla skrajnego przypadku x=1 (odpowiadającego bardzo wąskiej szczelinie między okładkami) wartość funkcji wynosi również 1. Co więcej, funkcja f(x) dąży do nieskończoności dla $x \to \infty$.



Oznacza to, że nawet dla najkorzystniejszego przypadku wąskiej szczeliny między okładkami, prędkość liniowa, z jaką powinna poruszać się zewnętrzna okładka kondensatora aby spełniony był warunek równości energii pól E i H, jest równa prędkości światła. Problem więc nie może być rozwiązany bez uwzględnienia efektów relatywistycznych. Oczywistym jest również, że z przyczyn technicznych, spełnienie warunków zadania jest niemożliwe.

Zadanie 5

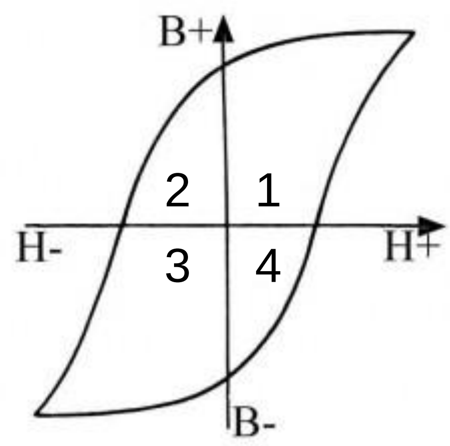
Rozważmy dwa identyczne stalowe pręty, z których jeden jest magnesem, a drugi nie. W jaki sposób, nie wykorzystując żadnych dodatkowych przyrządów, można ustalić, który pręt jest magnesem, a który nie.

Rozwiązanie

Linie sił pola wokół magnesu stałego są prostopadłe do jego płaszczyzny symetrii. Jeśli umieścimy stalowy pręt w tej płaszczyźnie, to zostanie on spolaryzowany w kierunku równoległym do magnesu, czyli siła oddziaływania nie jest skierowana wzdłuż osi pręta. Ponadto, ze względu na znaczną odległość od biegunów siła ta jest niewielka. Jeżeli pręty umieścimy w konfiguracji o symetrii litery T i będzie wyczuwalne oddziaływanie, będzie to oznaczać, że magnesem jest pręt odpowiadający pionowej kresce w literze T. Jeżeli brak jest oddziaływania, oznaczać to będzie, że ze względów omówionych powyżej, magnesem jest pręt poziomy.

Zadanie 5

Na rysunku przedstawiono typowa pętlę histerezy ferromagnetyka. Energia pola magnetycznego w ferromagnetyku jest proporcjonalna do iloczynu HB. Z rysunku wynika, że obszarach 1 i 3 energia jest dodatnia, natomiast w obszarach 2 i 4 ujemna. Czy takie spostrzeżenie jest prawidłowe?



Rozwiązanie

Należy pamiętać, że wykres pętli histerezy jest wynikiem pomiarów makroskopowych, których istotą jest uśrednianie po dużych objętościach.

W rzeczywistości, struktura magnetyczna ferromagnetyka nie jest jednorodna, a makroskopowa objętość próbki ferromagnetyka zawiera wiele mniejszych obszarów spontanicznego namagnesowania (domen magnetycznych). Energia każdego z obszarów jest niezerowa, jednak ponieważ w różnych domenach kierunki wektorów B są w przypadku materiału nienamagnesowanego rozłożone chaotycznie, średnia indukcja w objętości znacznie przekraczającej objętość domeny jest zerowa.

Jeżeli materiał był uprzednio namagnesowany, pozostaje pewne uporządkowanie domen i w efekcie, nawet przy braku zewnętrznego pola H istnieje wypadkowa indukcja B.

Wyrażenie ½HB uśrednione po dużej objętości reprezentuje nie tyle energię, co różnicę energii między energią ferromagnetyka w stanie określonym pewnymi wartościami H i B, a różną od zera energią ferromagnetyka nienamagnesowanego.

Obszary 2 i 4 odpowiadają sytuacji gdzie ta różnica jest ujemna, tzn. w tych stanach energia jest niższa od energii materiału nienamagnesowanego.

Zadanie 7

Zawieszony na metalowej sprężynie ciężarek wykonuje drgania o częstości f. Czy częstość drgań ulegnie zmianie jeśli zamiast ciężarka zostanie na sprężynie zawieszony pionowo magnes sztabkowy o takiej samej co ciężarek masie?

Rozwiązanie

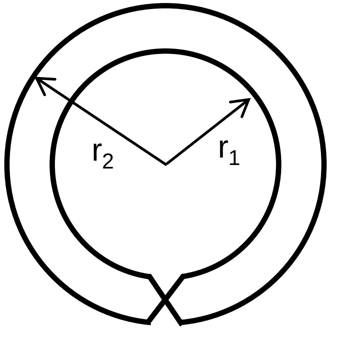
Podczas ruchu magnesu, w zwojach sprężyny indukowane są prądy, które powodują, że zwoje sprężyny przyciągają się wzajemnie. Należy zauważyć, że efekt przyciągania występuje zarówno podczas ruchu magnesu w górę jak i w dół. Oznacza to, że w każdej chwili ruchu, do wydłużenia sprężyny potrzebna jest większa siła niż w przypadku ciężarka i braku prądów indukowanych. Jest to równoważne efektywnemu zwiększeniu stałej sprężyny k, czyli zwiększeniu jej sztywności. Ponieważ częstość drgań f jest proporcjonalna do $(k/m)^{1/2}$, to częstość drgań jest większa gdy na sprężynie wisi magnes.

Innym efektem związanym z obecnością magnesu będzie zwiększenie tempa zanikania drgań. Wydzielenie ciepła Joule'a w sprężynie dzieje się kosztem ubytku energii drgań magnesu, tak więc drgania będą silniej tłumione.

Zadanie 8

Na rysunku poniżej przedstawiono płaski kontur z jednorodnego drutu. Traktujemy kontur jako niemal całkowicie pełne okręgi (długości odcinków brakujących do całkowitego zamknięcia okręgów są zaniedbywalne). Kontur znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym, którego kierunek jest prostopadły do konturu i którego wartość zmienia się w czasie. Zmienne pole magnetyczne indukuje w wewnętrznej pętli o promieniu r_1 siłę elektromotoryczną której wartość wynosi

$$\varepsilon_1 = \pi r_1^2 \left| \frac{dB}{dt} \right|$$



Oporność tej pętli wynosi

$$R_1 = \rho \frac{2\pi r_1}{s}$$

gdzie s oznacza pole przekroju poprzecznego drutu, a ρ jest opornością właściwą drutu. Natężenie prądu płynącego w tej pętli jest zgodnie z prawem Ohma dane równaniem

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1}{R_1} = \frac{r_1 s}{2\rho} \left| \frac{dB}{dt} \right|$$

Powyższe rozumowanie można powtórzyć dla drugiej pętli otrzymując analogiczne do powyższego równanie. Jednak ponieważ $r_1 \neq r_2$, więc $I_1 \neq I_2$, co jest w oczywisty sposób niemożliwe ze względu na wymaganie ciągłości prądu w obwodzie. Jakie będzie rzeczywiste natężenie prądu płynącego w pętlach i gdzie w powyższym rozumowaniu popełniono błąd?

Rozwiązanie

Żaden z okręgów nie jest oddzielnym obwodem, lecz oba okręgi stanowią w sumie jeden obwód. W obwodzie tym działa siła elektromotoryczna $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, a jego oporność jest sumaryczną opornością obu obwodów i wynosi R_1+R_2. Prąd płynący w obwodzie łatwo obliczyć i wynosi on

$$I = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R_1 + R_2} = \frac{s\left(r_1^2 + r_2^2\right)}{2\rho\left(r_1 + r_2\right)}$$

Należy również zauważyć, że rozpatrywany kontur z prądem nie jest w rzeczywistości płaski, ponieważ zawiera skrzyżowanie przewodów, które nie może być zrealizowane w płaszczyźnie. W takim przypadku nie jest oczywiste jak wygląda powierzchnia ograniczona konturem. Można ten problem obejść sumując siły elektromotoryczne indukowane w różnych częściach obwodu, pamiętając o stosowaniu jednolitej konwencji znaku obliczanej siły elektromotorycznej. Dla konturu rozpatrywanego w tym zadaniu sumaryczna siła elektromotoryczna wynosi.

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \left(\pi r_1^2 + \pi r_2^2\right)\frac{dB}{dt}$$

Powyższy wynik oznacza, że efektywna powierzchnia przez którą obliczamy strumień indukcji jest równa sumie pól ograniczonych okręgami.

Zadanie 9

Płaska pętla wykonana z drutu charakteryzuje się współczynnikiem samoindukcji L_0. Czy, i jak zmieni się wartość współczynnika jeśli pętlę położymy na płaskiej powierzchni żelaznej o przenikalności magnetycznej μ?

Rozwiązanie

Pole wytwarzane przez płaską pętlę z prądem (oznaczmy je jako H_0) znajdującą się w powietrzu (μ=1) jest symetryczne względem płaszczyzny, w której leży pętla i w każdym punkcie tej płaszczyzny wektory H_0 są do niej prostopadłe. Umieszczenie pętli na powierzchni ośrodka magnetycznego nie może zmienić symetrii pola. Natężenie pola wypadkowego w półprzestrzeni w powietrzu będzie proporcjonalne do H_0:

$$H_1 = \alpha H_0$$

gdzie α jest współczynnikiem proporcjonalności. Indukcja pola w tym obszarze wynosi

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \mu_0 \alpha H_0$$

Oznaczając natężenie pola w półprzestrzeni w żelazie jako H_1 mamy:

$$B_2 = \mu_0 \mu H_2$$

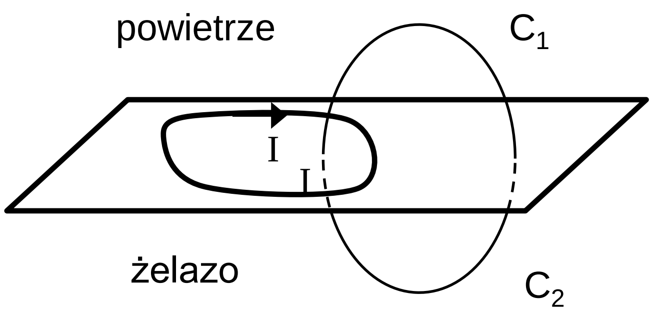
Ponieważ składowa normalna indukcji magnetycznej musi być ciągła na granicy dwóch ośrodków, możemy napisać:

$$\mu_0 \mu H_2 = \mu_0 \alpha H_0$$

skąd mamy

$$H_2 = \frac{\alpha}{\mu} H_0$$

Zastosujmy prawo Ampere'a do obliczenia cyrkulacji pola. Jako kontur całkowania wybierzmy kontur przechodzący przez wnętrze pętli i o kształcie symetrycznym względem powierzchni rozgraniczającej ośrodki (rysunek). Oznacza to, że części konturu C_1 i C_2 mają taki sam kształt i długość.



Cyrkulacja wektora H liczona wzdłuż dowolnie wybranego konturu zależy jedynie od prądów przewodzenia objętych konturem. Możemy więc napisać:

$$\int_C \vec{H}_o d\vec{l} = \int_{C_1} \vec{H}_1 d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{H}_2 d\vec{l} = \alpha \int_{C_1} \vec{H}_0 d\vec{l} + \frac{\alpha}{\mu} \int_{C_2} \vec{H}_0 d\vec{l}$$

Ponieważ pole H_0 jest symetryczne względem płaszczyzny rozdzielającej ośrodki i symetryczne są również obie części konturu mamy:

$$\int_{C_1} \vec{H}_1 d\vec{l} = \int_{C_2} \vec{H}_0 d\vec{l} = \frac{1}{2}\int_{C} \vec{H}_0 d\vec{l}$$

Czyli:

$$\int_{C} \vec{H}_0 d\vec{l} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)\int_{C} \vec{H}_0 d\vec{l}$$

Co oznacza, że

$$\alpha = \frac{2\mu}{1+\mu}$$

Tak więc, indukcja pola w całym obszarze spełnia warunek

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_1 = \frac{2\mu}{1+\mu}\vec{B}$$

gdzie $B=\mu H_0$ i ma sens indukcji magnetycznej wytwarzanej przez pętlę z prądem w przypadku gdy znajduje się ona z daleka od innych ciał.

Zmianę indukcyjności możemy określić rozważając gęstość energii pola magnetycznego. Wiadomo, że gęstość ta jest proporcjonalna do iloczynu indukcji i natężenia pola. Ponieważ na skutek umieszczenia pętli na powierzchni żelaza indukcja wzrosła $2\mu/(1+\mu)$ razy, wiemy, że w takim samym stopniu wzrosła energia pola. Energia pola magnetycznego ε jest związana z indukcyjnością równaniem

$$\varepsilon = \frac{1}{2} L I^2$$

co oznacza, że w takim samym stopniu jak energia wzrosła indukcyjność, czyli

$$L = \frac{2\mu}{1+\mu} L_0$$

Zadanie 10

Równoległa wiązka elektronów wytwarza wokół siebie pole magnetyczne, które powoduje, że igła umieszczonego w pobliżu kompasu ustawia się w określony sposób. Dla obserwatora, który porusza się zgodnie z kierunkiem ruchu elektronów, lecz z większą prędkością, prąd płynie w przeciwnym kierunku niż dla obserwatora spoczywającego. Dla poruszającego się obserwatora pole magnetyczne wytwarzane przez elektrony będzie miało więc przeciwny zwrot. Czy w związku z tym igła magnetyczna kompasu będzie dla tego obserwatora ustawiona również w przeciwnym kierunku niż dla obserwatora spoczywającego? Zakładamy brak innych pól magnetycznych niż wytwarzane przez elektrony.

Rozwiązanie

Ze sformułowanego powyżej problemu nie wynika w sposób jednoznaczny, czy kompas porusza się wraz z obserwatorem, czy też pozostaje w spoczynku. Jeżeli kompas pozostaje w spoczynku, to oddziałuje on z innym polem magnetycznym niż to, w którym znajduje się poruszający się obserwator. Jeżeli zaś kompas porusza się wraz z obserwatorem, to jego igła będzie zwrócona przeciwnie niż w poprzednim przypadku. Innymi słowy, w przypadku gdyby istniały dwa kompasy (jeden poruszający się z obserwatorem, a drugi spoczywający) to ich igły będą zwrócone w przeciwne strony i będzie to widoczne dla obu obserwatorów.

Zadanie 11

Jak wiadomo, do tej pory nie udało się odkryć swobodnych ładunków magnetycznych (monopoli magnetycznych). Przedyskutować zaproponowany poniżej sposób mogący prowadzić do obserwacji monopoli magnetycznych. Rozpatrzmy bardzo długi solenoid, w którym indukcja B_0 rośnie wprost proporcjonalnie do czasu. Zgodnie z prawami indukcji magnetycznej, takim zmianom indukcji B_0 musi towarzyszyć pojawienie się wirowego pola elektrycznego E. Ponieważ B_0 jest liniowo proporcjonalne do czasu (B_0~t), to pole E nie zależy od czasu (E~dB_0/dt). Rozpatrzmy pole na zewnątrz solenoidu z punktu widzenia układu O' poruszającego się równolegle do osi solenoidu ze stałą prędkością v. Pole obserwowane z tego układu można obliczyć stosując odpowiednie transformacje. Ponieważ solenoid jest bardzo długi, to w stałej odległości od osi solenoidu pole jest stałe a transformacja pola E ma postać:

$$\vec{E}' = \frac{\vec{E}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

W układzie O' pojawia się pole magnetyczne B'. Wektor B' jest w każdym punkcie prostopadły do wektorów v i E'. Ponieważ w układzie spoczywającym na zewnątrz solenoidu istnieje tylko pole elektryczne, więc

$$\vec{B}' = \frac{-\dfrac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Podsumowując, indukowane pole E oraz E' posiada cylindryczną symetrię obrotową. Pole B' jest prostopadłe do E i ma symetrię radialną. Oznacza to, że linie sił pola B' są liniami prostymi biegnącymi do nieskończoności, czyli nie są liniami zamkniętymi.

Geometria takiego pola jest więc taka sama jak w przypadku pola elektrycznego od długiej, jednorodnie naładowanej nici. Takie pole elektryczne można wytworzyć tylko wtedy, gdy istnieją ładunki będące źródłem tego pola. Można więc wnioskować, że w omawianym przypadku w układzie O' pojawiają się monopole magnetyczne. Doświadczalnie, można stwierdzić istnienie monopoli mierząc pole magnetyczne w układzie O', na przykład obserwując zachowanie igły magnetycznej poruszającej się szybko równolegle do osi solenoidu. Jeżeli igła ta ustawi się prostopadle do osi solenoidu, to będziemy mieli do czynienia z monopolami.

Czy taki eksperyment rokuje nadzieje na odkrycie monopoli magnetycznych?

Rozwiązanie

Błąd przytoczonego wyżej rozumowania wynika z błędnego założenia o braku pola magnetycznego na zewnątrz solenoidu. Jest ono konsekwencją niefizycznego założenia o nieskończonych rozmiarach solenoidu i co za tym idzie skupieniu całego pola magnetycznego w jego wnętrzu.

W przypadku każdego rzeczywistego solenoidu istnieje pole magnetyczne w otaczającej go przestrzeni, które posiada zarówno składową radialną jak i równoległą do osi solenoidu. Kształt linii tego pola zmieni się w układzie O', jednak pole B na zewnątrz solenoidu nigdy nie będzie miało charakteru radialnego, źródłowego, świadczącego o istnieniu monopoli magnetycznych.