PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Zadania problemowe z mechaniki z rozwiązaniami

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

Wzdłuż dwóch wzajemnie prostopadłych prostych jadą dwa samochody poruszając się ze stałymi prędkościami v_x i v_y startując z punktów x_0 i y_0. Łatwo wykazać, że prędkość z jaką oddalają się od siebie samochody w ogólnym przypadku zależy od czasu . Z drugiej strony istnieje twierdzenie, które głosi, że jeżeli dwa układy *O'* i *O"* poruszają się ze stałymi prędkościami względem inercjalnego układu *O* to zarówno *O'* jak i *O"* są inercjalne względem siebie, czyli prędkość układu *O'* względem *O"* nie zależy od czasu. Czy rezultat otrzymany dla oddalających się od siebie samochodów jest sprzeczny z tym twierdzeniem?

Rozwiązanie

Sprzeczność rezultatu dla samochodów i przytoczonego twierdzenie jest pozorna. Prędkość oddalania się od siebie samochodów (pochodna ich względnej odległości po czasie) wynosi:

$$u = \frac{dl}{dt} = \frac{v_x(x_0 + v_x t) + v_y(y_0 + v_y t)}{\sqrt{(x_0 + v_x t)^2 + (y_0 + v_y t)^2}}$$

Prędkość tak zdefiniowana nie jest jednak całkowitą prędkością jednego samochodu względem drugiego, a jedynie radialną składową prędkości w układzie biegunowym.

Zadanie 2

W układzie odniesienia związanym z Ziemią, prędkość spadającego swobodnie kamienia wynosi $v=gt$ (gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim). Jeżeli v jest końcową prędkością jaką osiągnie kamień spadając z pewnej wysokości to $t=v/g$ jest czasem spadania. Rozpatrzmy teraz ruch kamienia z punktu widzenia pewnego układu O' poruszającego się pionowo ze stają prędkością u względem Ziemi. W tym układzie odniesienia powinien pozostawać słuszny wzór $v'=g't'$. Zgodnie z równaniami transformacji Galileusza $v'=v+u$, natomiast $g'=g$. Zgodnie z powyższym $t'=v'/g'=(v+u)/g\neq t$, co oznacza, że czas spadania w układzie O' powinien być większy niż w układzie O związanym z Ziemią, co z kolei jest sprzeczne z prawem transformacji czasu $t=t'$. Jaki błąd został popełniony w powyższym rozumowaniu?

Rozwiązanie

Błąd kryje się w przyjęciu równości $v'=g't'$. W układzie O związanym z Ziemią kamień spada bez prędkości początkowej i jest to pewien szczególny przypadek ruchu w polu grawitacyjnym. Nie oznacza to wcale, że ten sam szczególny przypadek ruchu musi zachodzić w układzie O' . W przytoczonej sytuacji tak nie jest i kamień w układzie O' spada z pewną różną od zera i równą $-u$ prędkością początkową, zatem nie jest prawdziwe równanie $v'=g't'$. Należy zauważyć, że nie zostaje tu naruszona zasada mówiąca o tym, że we wszystkich inercjalnych układach odniesienia zjawiska fizyczne muszą zachodzić w taki sam sposób, mamy jedynie do czynienia ze szczególnym przepadkiem ruchu, który w innym układzie realizowany jest w inny sposób.

Zadanie 3

Rozpatrzmy sytuację polegającą na odbijaniu (idealnie sprężystym) piłki od podłogi winy poruszającej się z dół ze stałą prędkością *u*. Jeżeli w chwili zderzenia z podłogą prędkość piłki względem Ziemi wynosiła *v*, to po odbiciu jej prędkość wynosić będzie *v-2u* (również względem Ziemi). Przyjmijmy, że zderzenie nastąpiło w chwili *t=0*, a początek układu współrzędnych umieśmy w (nieruchomym względem Ziemi) punkcie odbicia. W tym układzie współrzędnych ruch piłki opisany jest równaniem:

$$y = (v - 2u)t - \frac{gt^2}{2}$$

Czas wznoszenia się piłki i maksymalną wysokość jaką ona osiągnie, znajdziemy z warunku, że w szczytowym punkcie jej lotu pochodna *dy/dt* powinna wynosić zero:

$$(v - 2u) - gt = 0$$

czyli

$$t = \frac{v - 2u}{g}$$

Podstawiając ten czas do równania ruchu znajdujemy

$$y_{\max} = \frac{(v - 2u)^2}{2g}$$

Powyższą wysokość oznaczmy jako h_1. W ciągu czasu *t* winda opuści się o:

$$h_2 = ut = \frac{u(v - 2u)}{g}$$

Odległość piłki od podłogi będzie w tej chwili równa

$$h_{\max} = h_1 + h_2 = \frac{(v-2u)^2}{2g} + \frac{u(v-2u)}{g} = \frac{v(v-2u)}{2g}$$

Rozpatrzmy teraz ruch piłki w układzie związanym z poruszającą się windą. W tym układzie podłoga windy jest nieruchoma, a prędkość piłki po odbiciu wynosi *v-u*, a zatem wysokość, na jaką się ona wzniesie będzie wynosić

$$h'_{\max} = \frac{(v-u)^2}{2g}.$$

Na podstawie powyższego rozumowania można wnioskować, że wysokość na jaką wzniesie się piłka nad poziom podłogi jest różna w dwóch inercjalnych układach odniesienia. Czy taki wniosek jest poprawny i czy można pogodzić go z transformacją Galileusza?

Rozwiązanie

Sprzeczność wyników otrzymanych w układach odniesienia Ziemi i windy wynika z błędnego założenia, że piłka wznosi się na maksymalną wysokość nad podłogą w tym samym momencie czasu. W chwili gdy prędkość piłki względem Ziemi jest równa zeru, jej prędkość względem windy jest różna od zera (wynosi *u*) i jest skierowana ku górze (względem podłogi piłka jeszcze się wznosi). W układzie Ziemi, wysokość piłki nad podłogą windy dana jest równaniem:

$$h = (v - 2u)t - \frac{gt^2}{2} + ut$$

Różniczkując to wyrażenie i postępując dalej tak jak w treści zadania znajdujemy maksymalną wysokość

$$h_{\max} = \frac{(v-u)^2}{2g}.$$

Powyższy wynik jest identyczny z wynikiem uzyskanym dla układy windy czyli $h_{max}=h'_{max}$ i tym samym sprzeczność zostaje usunięta.

Zadanie 4

Tor punku materialnego jest w pewnym układzie odniesienia linią zamkniętą. Czy w dowolnym innym układzie odniesienia tor ruchu tego punktu jest także linią zamkniętą?

Rozwiązanie

Żeby odpowiedzieć na postawione wyżej pytanie rozpatrzmy punkt materialny poruszający się po okręgu (po torze zamkniętym) ze stałą prędkością liniową v. Obserwując ruch punktu w układzie, w którym środek okręgu porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym stwierdzimy, że tor punktu jest cykloidą, czyli po torze nie będącym linią zamkniętą.

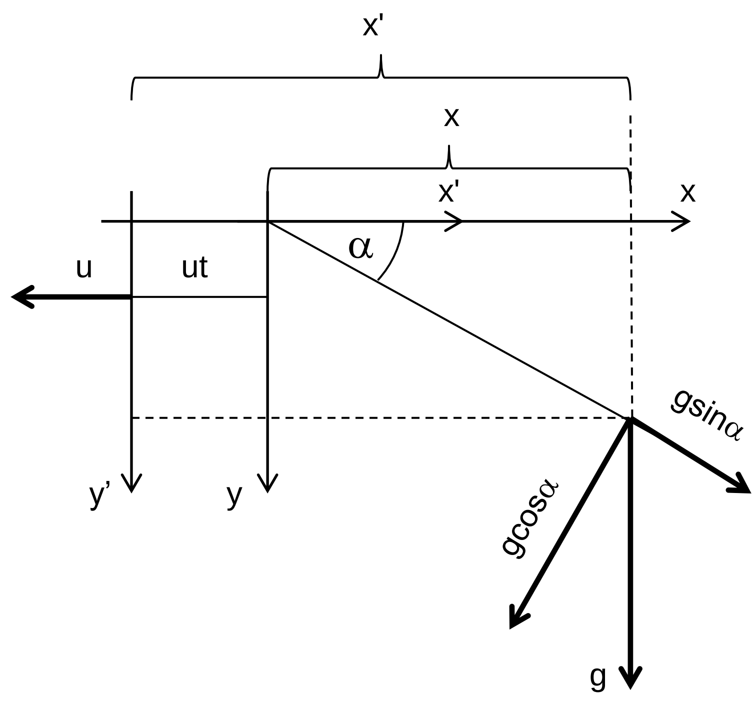
W ogólności, jeżeli w jednym układzie inercjalnym tor ciała jest linią zamkniętą, to nie może on być zamknięty w żadnym innym układzie inercjalnym. Jeżeli w układzie O ciało pokonuje zamknięty tor w czasie Δt, to jego tor będzie zamknięty tylko w takim układzie odniesienia O', który porusza się względem O w taki sposób, że na początku i na końcu przedziału czasu Δt znajduje się w takim samym położeniu względem układu O. W sposób oczywisty układ O' nie jest układem inercjalnym ponieważ musi poruszać się ze zmienną prędkością.

Zadanie 4

Klocek zsuwa się bez tarcia po równi pochyłej o kącie nachylenia α. Czy kształt toru ciała i kształt równi będą takie same w układzie *O'* poruszającym się poziomo z prędkością *u* względem równi? Znajdź równanie toru klocka w układzie *O'*.

Rozwiązanie

Załóżmy, że w chwili początkowej *t=0* oba układy (nieruchomy *O* i ruchomy *O'*) pokrywały się, a ich początki znajdowały się w punkcie, z którego startowało ciało. Niech osie obu układów będą skierowane w dół (rysunek)



Składowa przyspieszenia ziemskiego równoległa do równi wynosi *gsin*α, czyli droga przebyta przez klocek w czasie *t* wynosi

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \sin\alpha$$

Współrzędne ciała w układzie *O* dane są równaniami

$$x = s\cos\alpha = \frac{1}{2} g t^2 \sin\alpha\cos\alpha \qquad y = s\sin\alpha = \frac{1}{2} g t^2 \sin^2\alpha$$

Układ *O'* porusza się w lewo więc współrzędne w tym układzie wynoszą

$$x' = \frac{1}{2} g t^2 \sin\alpha\cos\alpha + ut \qquad y' = \frac{1}{2} g t^2 \sin^2\alpha$$

Eliminując z powyższych równań czas otrzymujemy równanie toru w postaci

$$x' = ay' + b\sqrt{y'}$$

gdzie $a = ctg\alpha$ i $b = (u/\sin\alpha)\,(2/g)^{1/2}$

Tor ciała w układzie *O'* nie jest więc linią prostą. Pochyła powierzchnia równi wygląda jednak tak samo w obu układach odniesienia, to jest dla obserwatora nieruchomego i nieruchomego. Pozorna sprzeczność wynika tu z faktu, że inaczej zdefiniowane są tor klocka i kształt równi. Równia jest zbiorem równocześnie istniejących punktów materialnych, które spełniają określone relacje przestrzenne. Tor natomiast jest czasową sekwencją punktów w przestrzeni. Powyższe spostrzeżenie można uogólnić na dowolny typ więzów.

Zadanie 5

Lufa działa jest ustawiona pod kątem α do poziomu. Cotangens tego kąta ctgα=$\Delta x/\Delta y$ gdzie Δx i Δy są rzutami długości lufy na osie układu współrzędnych. Przyjmujemy, że układ odniesienia *O* jest związany z Ziemią, a oś *x* jest skierowana poziomo. Pocisk wystrzelony z tego karabinu (przy braku siły grawitacji) porusza się po torze o takim samym kącie nachylenia, przy czym ctgα=v_x/v_y, gdzie v_x i v_y są składowymi wektora prędkości. Rozpatrzmy powyższą sytuację z punktu widzenia obserwatora, który znajduje się w układzie odniesienia *O'* poruszającym się ze stał prędkością u równolegle do osi *x*. Zgodnie z równaniami transformacji Galileusza możemy napisać że $v'_x=v_x+u$ oraz $v_y'=v_y$, czyli:

$$ctg\,\alpha' = \frac{v'_x}{v'_y} = \frac{v_x + u}{v_y} = ctg\,\alpha + \frac{u}{v_y}$$

Z powyższego wynika, że $\alpha' \neq \alpha$. Jednocześnie wiadomo, że transformacja Galileusza nie zmienia długości odcinków, a zatem $\Delta x'=\Delta x$ oraz $\Delta y'=\Delta y$, z czego wynika, że:

$$ctg\,\alpha' = \frac{\Delta x'}{\Delta y'} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = ctg\,\alpha$$

Co oznacza, że $\alpha'=\alpha$. Powyższe rozumowanie prowadzi do wniosku, że w układzie *O'* kąty nachylenia lufy i toru pocisku nie są jednakowe, w szczególności wtedy, kiedy pocisk porusza się w lufie. Można by więc wnioskować, że z punktu widzenia układu O' pocisk przebija ściankę lufy jeszcze przed jej opuszczeniem. Jak wyjaśnić ten paradoks?

Rozwiązanie

Przedstawione w tekście rozumowanie dotyczące różnych kątów nachylenia lufy i toru pocisku w układzie *O'* jest całkowicie poprawne. Nieprawidłowa jest jedynie konkluzja końcowa, która opiera się na sugestii, że nachylenia lufy i toru pocisku powinny być jednakowe. Lufa spełnia rolę więzów materialnych istniejących równocześnie w przestrzeni, tor pocisku jest natomiast zbiorem następujących po sobie w czasie położeń nie mających samodzielnego bytu. Podobne zagadnienie dyskutowane było w zadaniu 4.

Zadanie 6

Pocisk wystrzelony z punktu *A* trafia w cel umieszczony w punkcie *B*. Tor pocisku jest prostoliniowy, a prędkość pocisku jest stała. Czy można znaleźć taki układ odniesienia *O'*, w którym pocisk porusza się po łuku o promieniu $R=AB$?

Rozwiązanie

Można znaleźć wiele układów, w których tor pocisku będzie okręgiem lub wycinkiem okręgu. Jednak, bez dodatkowych postulatów odnośnie prędkości kątowej pocisku w układzie *O'* lub charakteru ruchu układu *O'* względem układu *O*, układ *O'* nie może być jednoznacznie określony. Można jedynie określić jego ogólną cechę, a mianowicie taką, że nie może być on układem inercjalnym.

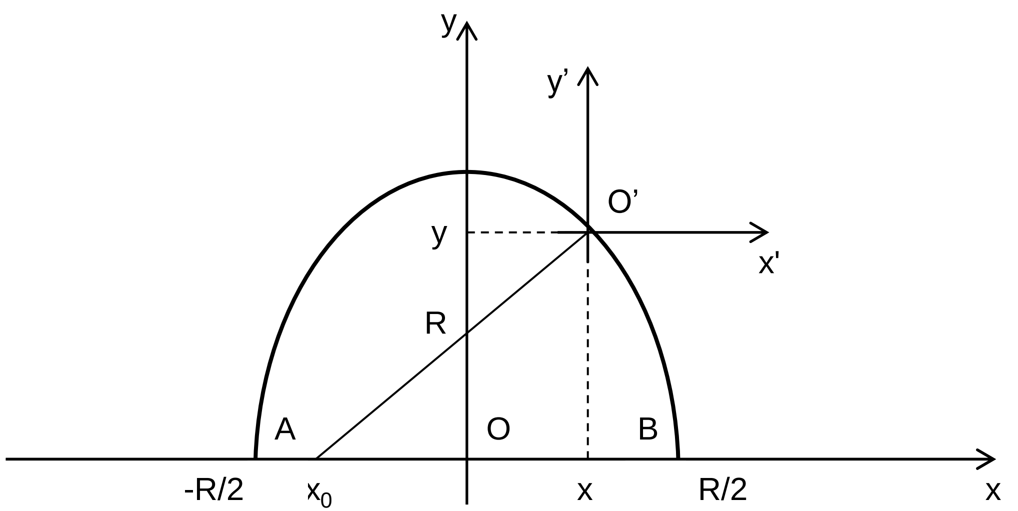
Rozpatrzmy przykład układu spełniającego warunki zadania. Niech układ *O'* porusza się po prostej $y=R$ ze stałą prędkością u równą prędkości pocisku v_0. Załóżmy że w w chwili $t=0$ początki układów *O* i *O'* pokrywały się. Jeżeli układ *O'* obraca się w płaszczyźnie *xy* ze stałą prędkością kątową ω, to w tym układzie odniesienia pocisk porusza się po okręgu z prędkością kątową $\omega'=-\omega$. Jeżeli $\omega=nv_0/R$, gdzie n jest liczbą naturalną, wówczas w układzie *O'* pocisk zakreśli n-krotnie pełny okrąg.

Opisany powyżej układ nie jest jedynym spełniającym warunki zadania. Rozpatrzmy przypadek, kiedy prędkość układu *O'* nie jest stała, jednak składowa jego prędkości u_x ma stałą wartość oraz osie układu *O'* mają stałą orientację w przestrzeni względem *O* (układ *O'* nie obraca się). Jeżeli w układzie *O'* pocisk ma poruszać się po okręgu (lub po łuku okręgu) to w chwili $t=0$ początek układu powinien znajdować się w punkcie *B,* a w chwili $t=R/v_0$ w punkcie *A*. Oznacza to, że $u_x=-v_0$, a tor, po którym porusza się układ *O'* jest krzywą symetryczną względem środka odcinka *AB*.

W tym właśnie punkcie umieśćmy początek układu *O*. Z poniższego rysunku wynika, że współrzędne początku układu *O’* spełniają równanie:

$$\left(x - x_0^2\right) + y^2 = R^2$$

gdzie x_0 to współrzędna pocisku w układzie *O*.



Z warunku u_x=-v_0 wynika, że x=-x_0, a zatem

$$\left(2x^2\right) + y^2 = R^2$$

lub

$$\frac{x^2}{(R/2)^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$$

Układ *O'* porusza się więc po torze w kształcie półelipsy o półosiach *R/2* i *R*. Jeżeli *O'* porusza się p[o górnej połowie elipsy (*y*>0), to w tak wybranym układzie pocisk porusza się po dolnej połowie okręgu o promieniu *R*, a jego równanie toru ma postać

$$y' = -\sqrt{R^2 - x'^2}$$

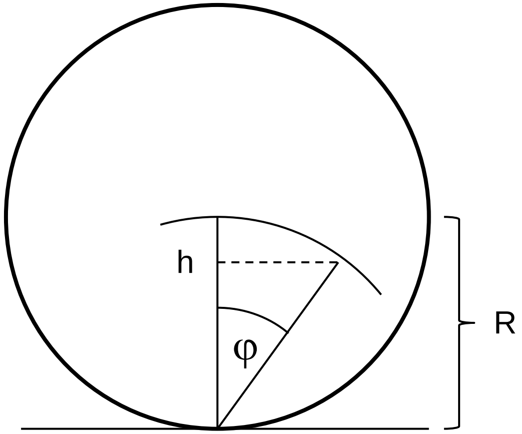
Zauważmy, że w odróżnieniu do pierwszego rozważanego (obracającego się ze stałą prędkością kątową) układu, obecny układ nie może zrealizowany w praktyce, czyli jest „niefizyczny". Wynika to z faktu, że wraz ze zbliżaniem się układu *O'* do punktów *A* lub *B* prędkość całkowita powinna rosnąć do nieskończoności, bo w innym przypadku składowa u_x nie mogłaby mieć stałej wartości.

Zadanie 7

Toczenie się bez poślizgu krążka po płaszczyźnie można rozpatrywać jako jego obrót wokół chwilowej osi wyznaczonej przez punkt styczności krążka z podłożem. Względem tej osi działa ku górze odśrodkowa siła bezwładności równa co do wartości mv^2/R, gdzie R jest promieniem krążka. Można by wnioskować, że nacisk wywierany przez krążek na podłoże jest mniejszy od działającej na niego siły ciężkości. Co więcej, gdy prędkość krążka jest dostatecznie duża ($v^2>gR$), wtedy krążek nie wywierałby żadnego nacisku na podłoże. Powyższe wnioski nie są jednak zgodne z doświadczeniem. Przedyskutuj powyższe rozumowanie i podaj poprawną interpretację zjawiska.

Rozwiązanie

Podczas obrotu krążka, środek jego masy porusza się po okręgi o promieniu R (rysunek)



Obrotowi krążka o kąt φ powinno towarzyszyć opuszczenie się środka masy o odcinek *h*. W rzeczywistości, dzięki reakcji podłoża, środek masy nie ulega obniżeniu i pozostaje na tym samym poziomie. Wynika z tego, że na podłoże powinna być wywierana dodatkowa siła nacisku, która zgodnie z drugą zasadą dynamiki jest równa:

$$F = m\frac{d^2h}{dt^2}$$

Z rysunku wynika, że

$$h = R(1 - \cos\varphi)$$

Rozwijając powyższe wyrażenie w szereg i pomijając wyrazy wyższe niż drugiego rzędu otrzymujemy

$$h = \frac{R\varphi^2}{2}$$

Różniczkując powyższe równanie otrzymujemy przyspieszenie „opadania” środka masy krążka:

$$\frac{d^2h}{dt^2} = R\left[\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]$$

W granicy małych kątów ($\varphi \to 0$) otrzymujemy przyspieszenie równe $R\omega^2$ gdzie ω jest prędkością kątową obrotu wokół punktu styczności. Wyrażając prędkość kątową jako $\omega = v/R$ i korzystając z drugiej zasady dynamiki otrzymujemy

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

Siła ta jest równa sile odśrodkowej, natomiast zwroty obu sił są przeciwne. Ostatecznie więc, siła nacisku krążka na podłoże nie zależy od jego prędkości.

Zadanie 8

Ciężarek o masie m zawieszony na sprężynie powoduje jej wydłużenie o odcinek x. Energia potencjalna sprężyny ($E_s=kx^2/2$, gdzie k jest stałą sprężystości sprężyny) wzrosła kosztem zmniejszenia się potencjalnej energii zawieszonego ciężarka. Względem poziomu wyznaczonego przez dolny koniec nieobciążonej sprężyny, energia ciężarka zmniejszyła się o $E_c=mgx$. Korzystając z zasady zachowania energii możemy napisać $kx^2/2=mgx$, skąd mamy $kx/2=mg$. Wiadomo jednak, że warunek równowagi sił wymaga aby siła sprężystości równoważyła siłę ciężkości czyli $kx=mg$, co jest sprzeczne z poprzednim rezultatem. Jak wyjaśnić powyższą rozbieżność?

Rozwiązanie

Prawdą jest, że energia sprężyny rośnie kosztem energii potencjalnej ciężarka, jednak stan równowagi (nieruchomy ciężarek na wysokości x) osiągany jest po wygaśnięciu drgań. Pokonanie oporów tłumienia wymaga pewnej pracy, w wyniku czego cześć energii początkowej zamieniana jest na ciepło (wydzielone wewnątrz sprężyny lub w efekcie tarcia zewnętrznego). W powyższym rozumowaniu fakt ten nie został uwzględniony, a prawidłowy bilans energii należałoby zapisać jako $kx^2/2=mgx+Q$ gdzie Q oznacza wydzielone ciepło. Stan końcowy można osiągnąć również przez podtrzymywanie ciężarka ręką, jednak w takim wypadku nie mamy do czynienia z układem izolowanym, w którym obowiązuje zasada zachowania energii.

Warto również zauważyć, że energia wytracana w postaci ciepła w sprężynie stanowi, wbrew intuicji, aż połowę początkowej energii układu.

Zadanie 9

W dwóch naczyniach wypełnionych długą, elastyczną rurką znajduje się ciecz o wysokiej lepkości (np. syrop). Na początku poziomy cieczy w obu zbiornikach są jednakowe. W pewnej chwili jedno z ramion zostaje szybko podniesione ku górze, a po wyrównaniu poziomów cieczy opuszczone do początkowego położenia. Sumaryczna praca przesunięcia naczynia w górę i w dół powinna być równa zeru. Z kolei energia potencjalna układu w stanie końcowym i początkowym powinna być taka sama. Równocześnie jednak podczas przepływu lepkiej cieczy wydzielona zostaje pewna ilość ciepła. Jak pogodzić fakt bilansowania się energii mechanicznej z wydzieleniem ciepła?

Rozwiązanie

Zasugerowane w tekście twierdzenie jakoby energia mechaniczna bilansowała się w opisanej sytuacji jest nieprawdziwe. Załóżmy dla uproszczenia, że rurki łączące naczynia są bardzo cienkie a naczynia są cylindryczne i mają przekrój poprzeczny S. Niech ρ oznacza gęstość cieczy, a h niech będzie wysokością cieczy w ruchomym naczyniu. Podniesienie naczynia na pewną wysokość x oznacza podniesienie cieczy o masie $m=Sh\rho$. Wykonana przy tym praca wynosi $W_1=S\rho ghx$. Po ustaleniu stanu równowagi, wysokość słupa cieczy w podniesionym naczyniu obniży się i będzie wynosić $h'=h-x/2$. Ponowne obniżenie naczynia jest związane z wykonaniem pracy $W_2=-S\rho g(h-x/2)x$. Sumaryczna praca $W_1+W_2=(S\rho gx^2)/2$ i jest większa od zera. Ciepło wydziela się więc kosztem energii dostarczonej z zewnątrz w trakcie podnoszenia naczynia.

W przypadku gdy ciecz wypełniająca naczynia pozbawiona by była lepkości, w stanie końcowym następowały by oscylacje wokół poziomu odpowiadającemu stanowi równowagi.

Zadanie 10

Energia potencjalna rozciągniętej sprężyny wynosi $E=kx^2/2$ (gdzie k to stała sprężystości, a x wydłużenie sprężyny). Jeśli podzielimy myślowo sprężynę na dwie równe części, to wydłużenie każdej z części wynosi $x/2$, a zatem energia każdej połowy sprężyny wynosi $E'=k/2(x/2)^2=kx^2/8$. W takim wypadku energia całej sprężyny wynosi $E=2E'=kx^2/4$, co jest sprzeczne z pierwszym wzorem. W którym miejscu powyższego rozumowania popełniony został błąd?

Rozwiązanie

Błąd polega za założeniu, że współczynnik sprężystości k jest stałą materiałową i zależy jedynie od materiału z jakiego wykonano sprężynę. W rzeczywistości współczynnik k zależy nie tylko od materiału sprężyny, lecz także od jej długości. Jeżeli pod działaniem pewnej siły przyrost długości sprężyny przypadający na jeden zwój wynosi Δx, to całkowite wydłużenie sprężyny jest równe $x=n\,\Delta x$, gdzie n jest liczbą zwojów. Wielkość $\mathbf{\Delta x}$ jest proporcjonalna do wartości działającej siły F, tzn. $\Delta x=cF$, gdzie c jest współczynnikiem zależnym tylko od materiału oraz geometrii zwoju. Obowiązuje więc związek $x=ncF$. Wiadomo też, że $F=kx$. Porównując te wyrażenia mamy $k=1/nc$. Współczynnik sprężystości połowy sprężyny (czyli sprężyny o $n/2$ zwojów) jest więc dwukrotnie większy niż współczynnik k całej sprężyny. Wzięcie pod uwagę zmianę współczynnika k w sposób oczywisty eliminuje sprzeczność przedstawioną w zadaniu.

Zadanie 11

W eksperymencie kosmicznym ważnym warunkiem powodzenia było to, żeby statek kosmiczny utrzymywał się w stałej odległości od Słońca, jednak nie krążąc wokół niego. Spełnienie tego warunku wymaga, aby pracujące przez cały czas silniki odrzutowe wyrzucały gazy spalinowe w kierunku Słońca, ponieważ przy wyłączonych silnika statek opadłby na Słońce. Sytuacja taka wymaga, aby silnik wykonywał w sposób ciągły pracę, podczas gdy ani energia kinetyczna ani energia potencjalna statku nie ulegałaby zmianie. W jaki sposób więc można opisaną wyżej sytuację pogodzić z zasadami zachowania energii oraz pędu?

Rozwiązanie

Lot statku kosmicznego napędzanego silnikiem odrzutowym stanowi przykład ilustrujący zasadę zachowania pędu. Konsekwencją tej zasady jest spostrzeżenie, że jeśli przed włączeniem silnika rakieta spoczywała w pewnym układzie odniesienia, to w trakcie lotu środek masy statku i gazów spalinowych pozostaje nieruchomy w tym samym układzie odniesienia. Innymi słowy praca silnika odrzutowego nie zmienia stanu ruchu układu starek-gazy spalinowej jako całości, może jedynie zmieniać stan ruchu poszczególnych elementów układu. W rozważanym przykładzie nie możemy więc traktować statku i gazów spalinowych rozłącznie. W rzeczywistości środek masy układu statek-gazy w sposób ciągły opada na Słońce. Utrzymywanie stałej energii (potencjalnej i kinetycznej) statku wymaga równoczesnych zmian energii potencjalnej gazów .

Zadanie 12

Mierząc prędkość spadającego swobodnie kamienia w układzie związanym z Ziemią można łatwo wykazać, że suma energii potencjalnej i kinetycznej kamienia jest wielkością stałą. Fakt, że zasada zachowania energii jest spełniona oznacza, że układ związany z Ziemią jest układem inercjalnym. Oznacza to jednak również to ,ze powinna w nim być spełniona zasada zachowania pędu, a jak łatwo zauważyć, pęd kamienia nie jest stały. Skomentuj tę sytuację.

Rozwiązanie

Zasady zachowania pędu i energii odnoszą się do układu Ziemia-kamień, a nie do jego poszczególnych elementów. Zmiana pędu kamienia nie oznacza więc naruszenia zasady zachowania pędu, ponieważ zmianie pędu kamienia towarzyszy zmiana pędu Ziemi.

Należy ponadto zauważyć, że układ związany z Ziemią nie jest ściśle inercjalny, a warunek inercjalności spełnia układ środka masy (pomijamy tu nienercjalność związaną z ruchem wirowym i orbitalnym Ziemi). W tym układzie odniesienia całkowity pęd układu kamiań-Ziemia musi być stały czyli $mv_k=Mv_Z$, gdzie m i M są odpowiednio masami kamienia i Ziemi, a v_k i v_Z są ich prędkościami mierzonymi w układzie środka masy. Z zasady zachowania pędu wynika więc, że prędkość Ziemi $v_Z=v_k m/M$ jest zawsze bardzo mała w porównaniu z prędkością kamienia. Zakładając, że kamień spada swobodnie przez 1 sekundę osiągając w ten sposób prędkość 10m/s, a masa kamienia wynosi 1kg ($m/M=1.6*10^{-25}$) to prędkość Ziemi wzrośnie do $1.6*10^{-24}$m/s. Oznacza to, że w ciągu jednej sekundy Ziemia przesuwa się o odległość 10 rzędów wielkości mniejsza niż rozmiar jądra atomowego.

Podnosząc do kwadratu równanie wyrażające zasadę zachowania pędu otrzymujemy zależność między energiami kinetycznymi w postaci $E_Z = m/M E_k$, gdzie E_Z i E_k oznacza energie kinetyczne Ziemi i kamienia. Z przytoczonych wyżej oszacowań wynika, że energia kinetyczna Ziemi jest również zaniedbywalnie mała w porównaniu z energią kamienia i tym samym w praktyce nie wpływa na bilans energii.

Przyjmując więc E_Z jako równą zeru, przyjmujemy też, że $v_Z=0$, co jest równoznaczne z założeniem, że układ środka masy kamienia i Ziemi jest identyczny z układem związanym z Ziemią. Innym ważnym wnioskiem z powyższych rozważań jest konieczność zachowania ostrożności przy rozpatrywaniu zagadnień, w których występują obiekty o porównywalnych masach.

Zadanie 13

Satelita porusza się po orbicie kołowej dookoła Ziemi. Ponieważ orbita jest kołowa, prędkość kątowa satelity musi być stała (ω=*const*). Całkowita energia satelity jest sumą jego energii potencjalnej i kinetycznej:

$$E(r) = -G\frac{Mm}{r} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

gdzie *M* jest masą Ziemi a m masą satelity. Na stabilnej orbicie kołowej energia satelity jest minimalna i w celu jej znalezienia należy zbadać ekstremum wyrażenia na energię E(r):

$$\frac{dE}{dr} = G\frac{Mm}{r^2} + m\omega^2 r$$

Przyrównując powyższą pochodną do zera mamy równanie

$$G\frac{M}{r^2} + \omega^2 r = 0$$

które nie ma dodatniego rozwiązania ze względu na *r*, a promień orbity w sposób oczywisty nie może być ujemny. Powyższe rozumowanie prowadzi do paradoksalnego wniosku, że stabilna orbita kołowa nie może istnieć. Jaki błąd został popełniony w powyższym rozumowaniu i jak powinno wyglądać poprawne rozwiązanie problemu?

Rozwiązanie

Poszukiwanie promienia orbity przez badanie ekstremum energii jest zabiegiem prawidłowym, jednak sama operacja różniczkowania oznacza pewne manipulacje fizyczne, które muszą zostać uwzględnione w obliczeniach

Szukanie ekstremum poprzez liczenie pochodnej jest badaniem zmian funkcji przy zmianach jej argumentu. W naszym przypadku argumentem funkcji energii jest promień i różniczkowanie oznacza fizycznie dokonywanie niewielkich zmian w promieniu orbity satelity. Prędkość kątowa jest nierozerwalnie związana z promieniem orbity i dlatego musi ulegać zmianom wraz z przesunięciem radialnym. W podanym w zadaniu obliczeniu przyjęto ω=*const*, co poprowadziło do niepoprawnych wniosków.

Zależność między r i ω zostanie uwzględniona automatycznie jeżeli energię kinetyczną satelity wyrazić za pomocą momentu pędu *L*, który jest całką ruchu (tzn. pozostaje stały podczas ruchu):

$$E(r) = -G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Różniczkując względem *r* otrzymujemy równanie:

$$G\frac{Mm}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3} = 0$$

skąd mamy ostatecznie:

$$r = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3}$$