PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Mechanika

Zadania z rozwiązaniami

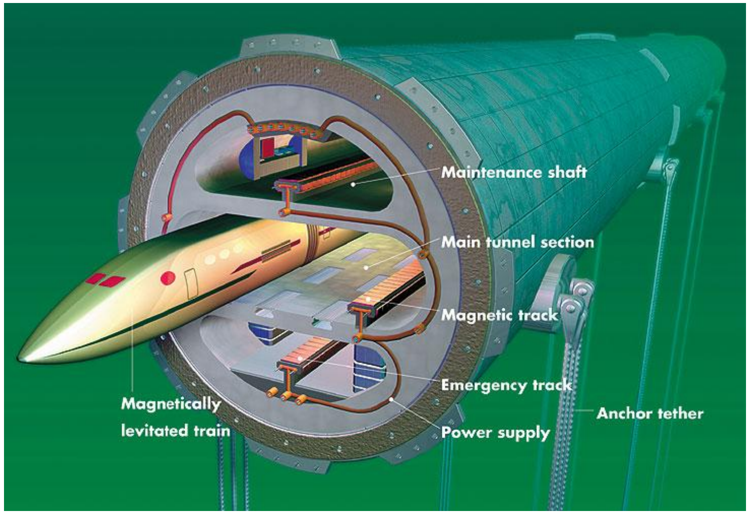
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

- Pociąg transatlantycki miałby według koncepcji łączyć Londyn z Nowym Yorkiem podróżując na poduszce magnetycznej w podwodnym tunelu o długości 5000 km wypełnionym próżnią. Zakładając przyspieszenie i opóźnienie jest stałe i równe 1g oraz brak jakichkolwiek oporów oblicz czas potrzebny na taką podróż jeśli prędkość maksymalna wynosi (a) 500 km/h i (b) 8800 km/h.



Zadanie 1 - rozwiązanie

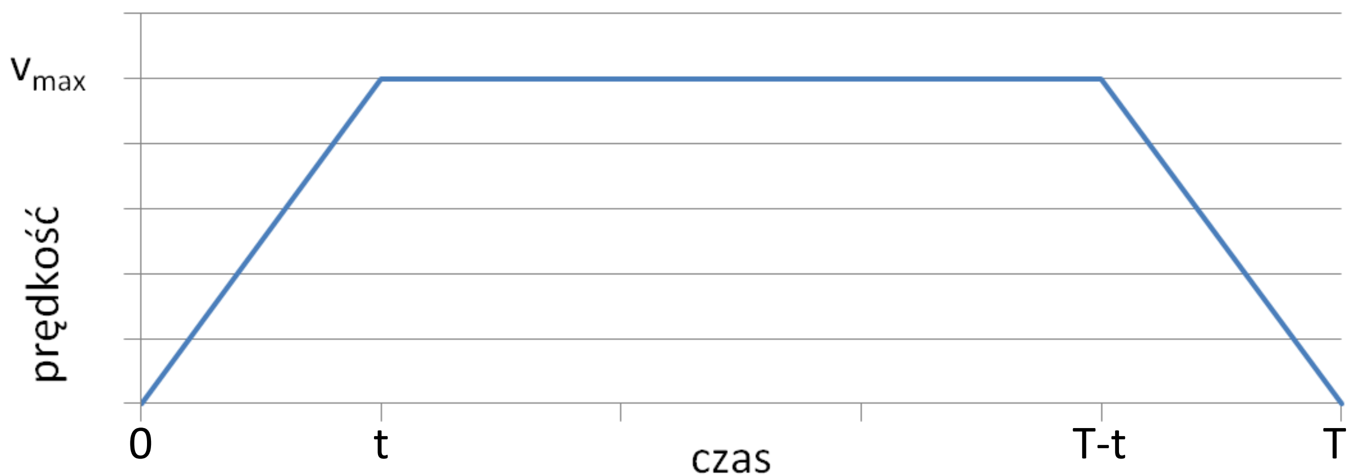
Podróż będzie składała się z okresu rozpędzania się (przyspieszenia), okresu podróży z prędkością maksymalną oraz okresu hamowania (opóźnienia).Okresy przyspieszania i hamowania będą trwały tyle samo czasu, co oznaczmy jako t. Przebyta droga S będzie całką prędkości po czasie, czyli polem powierzchni pod wykresem prędkości od czasu, tj.

$$S = \frac{1}{2} v_{\max} t + v_{\max}(T - 2t) + \frac{1}{2} v_{\max} t = v_{\max}(T - t)$$

skąd po uwzględnieniu, że czas t rozpędzania/hamowania to iloraz prędkości maksymalnej i przyspieszenia:

$$T = \frac{S}{v_{\max}} + \frac{v_{\max}}{a} \xrightarrow{v_{\max} = 500\frac{km}{h}} 10\,\text{godz.}$$

$$\xrightarrow{v_{\max} = 8800\frac{km}{h}} 38\,\text{min}.$$



Zadanie 2

Trasę kolejową Warszawa-Grodzisk Mazowiecki w 1845 roku pociągi parowe pokonywały w 45 minut zatrzymując się po drodze na 2 stacjach, Dzisiaj podróż osobowym pociągiem elektrycznym o prędkości maksymalnej 110 km/h na tym odcinku trwa 40 minut i obejmuje 8 postojów na przystankach. Zakładając, że przyspieszenie w czasie startu i hamowania jest stałe i równe zarówno 1845 jak i dzisiaj, pociągi między każdymi dwiema stacjami osiągają prędkość maksymalną oraz, że postój na każdej stacji trwa minutę oblicz prędkość maksymalną pociągu parowego.

Zadanie 2 - rozwiązanie

$$S = 9\left(\frac{1}{2}v_{\max}t + \frac{1}{2}v_{\max}t\right) + v_{\max}\left(T_{2013} - 8t_{STOP} - 18t\right) = v_{\max}\left(T_{2013} - 8t_{STOP} - 9t\right) = v_{\max}\left(T_{2013} - 8t_{STOP} - 9\frac{v_{\max}}{a}\right)$$

$$S = 3\left(\frac{1}{2}v'_{\max}t' + \frac{1}{2}v'_{\max}t'\right) + v'_{\max}\left(T_{1845} - 2t_{STOP} - 6t'\right) = v'_{\max}\left(T_{1845} - 2t_{STOP} - 3t'\right) = v'_{\max}\left(T_{1845} - 2t_{STOP} - 3\frac{v'_{\max}}{a}\right)$$

$$\frac{9v_{\max}}{T_{2013} - 8t_{STOP} - \frac{S}{v_{\max}}} = \frac{3v'_{\max}}{T_{1845} - 2t_{STOP} - \frac{S}{v'_{\max}}}$$

$$3v_{\max}\left(T_{1845} - 2t_{STOP}\right) - \frac{3Sv_{\max}}{v'_{\max}} = v'_{\max}\left(T_{2013} - 8t_{STOP} - \frac{S}{v_{\max}}\right)$$

$$\left(T_{2013} - 8t_{STOP} - \frac{S}{v_{\max}}\right)v'^{2}_{\max} - 3v_{\max}\left(T_{1845} - 2t_{STOP}\right)v'_{\max} + 3Sv_{\max} = 0$$

$$\Delta = 9v^{2}_{\max}\left(T_{1845} - 2t_{STOP}\right)^{2} - 12Sv_{\max}\left(T_{2013} - 8t_{STOP} - \frac{S}{v_{\max}}\right) = \left(213{,}6km\right)^{2}$$

$$v'_{\max} = \frac{3v_{\max}\left(T_{1845} - 2t_{STOP}\right) \pm \sqrt{\Delta}}{2\left(T_{2013} - 8t_{STOP} - \frac{S}{v_{\max}}\right)} = \frac{236{,}5 - 213{,}6}{0{,}54} = 42{,}5\frac{km}{h}$$

Drugie równania kwadratowego rozwiązanie jest niefizyczne.

Zadanie 3

Samochód ma masę 1,5 tony i hamuje z prędkości 90 km/h. Kierowca samochodu hamując przenosi siłę nacisku pedału hamulca na 10 razy większą siłę nacisku klocków hamulcowych na tarcze. Kierowca po zauważeniu przeszkody naciska na hamulec zwiększając liniowo siłę nacisku od 0 do 750 N w ciągu 0,5s (czas reakcji). Oblicz drogę hamowania jeśli noga kierowcy o masie efektywnej 10 kg podlega siłom bezwładności. Załóż że kierowca naciska pedał gazu poziomo, zaś współczynnik tarcia klocków o tarcze wynosi 1,0.

Zadanie 3 - rozwiązanie

Siła nacisku na hamulec rośnie liniowo z czasem $F_1=\alpha t$ (α=750N/0,5s=1500N/s). Dodatkowo na hamulec działa docisk wynikający z siły bezwładności której podlega noga $F_2=m_n a$, stąd:

$$\begin{cases} 10(\alpha t + a m_n) = Ma & dla\, t < t_r \\ 10F_{\max} = Ma & dla\, t > t_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{10\alpha t}{M - 10m_n} & dla\, t < t_r \\ a = \dfrac{10F_{\max}}{M} & dla\, t > t_r \end{cases}$$

Czas hamowania będzie określony przez równanie (na prędkość):

$$v(t_z) = v_0 - \int_0^{t_z} a\,\mathrm{d}t = v_0 - \int_0^{t_r} \frac{10\alpha t}{M - 10m_n}\,\mathrm{d}t - \frac{10F_{\max}}{M}(t_z - t_r) = 0$$

$$v_0 = \frac{5\alpha}{M - 10m_n} t_r^2 + \frac{10F_{\max}}{M}(t_z - t_r)$$

$$t_z = \frac{M}{10F_{\max}} v_0 - \frac{5\alpha M}{(M - 10m_n)10F_{\max}} t_r^2 + t_r = 4{,}43s$$

Zadanie 3 - rozwiązanie

zaś droga hamowania wyniesie

$$x(t_z)=\int_0^{t_z} v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{t_r}\left(v_0-\frac{5\alpha}{M-10m_n}t^2\right)\mathrm{d}t+\int_{t_r}^{t_z}\left(v(t_r)-\frac{10F_{\max}}{M}t\right)\mathrm{d}t$$

$$x(t_z)=v_0t_r-\frac{5\alpha}{3(M-10m_n)}t_r^{\ 3}+v_0t_z+\frac{5\alpha}{(M-10m_n)}t_r^{\ 2}t_z-\frac{5F_{\max}}{M}t_z^{\ 2}-v_0t_r-\frac{5\alpha}{(M-10m_n)}t_r^{\ 3}+\frac{5F_{\max}}{M}t_r^{\ 2}$$

$$x(t_z)=v_0t_z+\frac{5\alpha t_r^{\ 2}\left(t_z-\frac{4}{3}t_r\right)}{(M-10m_n)}-\frac{5F_{\max}\left(t_z^{\ 2}-t_r^{\ 2}\right)}{M}=67{,}32m$$

Zadanie 4

Wilk goni zająca. W pewnej chwili t_0 jest od niego w odległości 50m. Dziesięć sekund później wilk przebiegł odległość 100m, ale zając był nadal 30 m przed nim. Po przebiegnięciu przez wilka następnych 80m zając uciekł już o kolejne 60m. Pościg trwał dalej, a zając i wilk na skutek zmęczenia biegli (od początku) z opóźnieniem w ten sposób rosnącym liniowo w czasie. Ile (sekund i metrów) trwał pościg od chwili t_0?

Zadanie 4 - rozwiązanie

Równania ruchu wilka i zająca

$$a_w(t) = a_z(t) = -\alpha t \quad (1)$$

$$v_w(t) = v_w(0) + \int_0^t a_w dt = v_w(0) - \frac{\alpha t^2}{2} \quad (2)$$

$$v_z(t) = v_z(0) + \int_0^t a_z dt = v_z(0) - \frac{\alpha t^2}{2} \quad (3)$$

$$s_w(t) = \int_0^t v_w dt = v_w(0)t - \frac{\alpha t^3}{6} \quad (4)$$

$$s_z(t) = s_z(0) + \int_0^t v_z dt = s_z(0) + v_z(0)t - \frac{\alpha t^3}{6} \quad (5)$$

Warunki w chwili t_1 (=10s):

$$s_w(t_1) = v_w(0)t_1 - \frac{\alpha t_1^3}{6} \quad (6)$$

$$s_z(t_1) = s_z(0) + v_z(0)t_1 - \frac{\alpha t_1^3}{6} \quad (7)$$

Warunki w chwili t_2 :

$$s_w(t_2) = v_w(0)t_2 - \frac{\alpha t_2^3}{6} \quad (8)$$

$$s_z(t_2) = s_z(0) + v_z(0)t_2 - \frac{\alpha t_2^3}{6} \quad (9)$$

Zadanie 4 - rozwiązanie

Warunki w chwili złapania T:

$$s_w(T) = s_z(T) = v_w(0)T - \frac{\alpha T^3}{6} = s_z(0) + v_z(0)T - \frac{\alpha T^3}{6} \qquad (10)$$

$$[v_w(0) - v_z(0)]T = s_z(0) \qquad (11)$$

Odejmując od siebie (6) i (7) i uwzględniając (11):

$$s_w(t_1) - s_z(t_1) = [v_w(0) - v_z(0)]t_1 - s_z(0)$$

skąd:

$$T = \frac{s_z(0)t_1}{s_w(t_1) - s_z(t_1) + s_z(0)} (= 25s)$$

i analogicznie odejmując (8) i (9) i uwzględniając (11):

$$t_2 = \frac{s_w(t_2) - s_z(t_2) + s_z(0)}{s_z(0)} T (= 20s)$$

Dzieląc (6) przez (8):

$$\frac{s_w(t_1) + \frac{\alpha t_1^{\ 3}}{6}}{s_w(t_2) + \frac{\alpha t_2^{\ 3}}{6}} = \frac{t_1}{t_2}$$

skąd:

$$\alpha = 6\frac{t_2 s_w(t_1) - t_1 s_w(t_2)}{t_1 t_2^{\ 3} - t_1^{\ 3} t_2} (= 0{,}02)$$

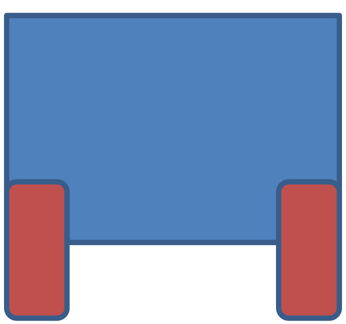
$$v_w(0) = \frac{s_w(t_2)}{t_2} + \frac{\alpha t_2^{\ 2}}{6} \left(= 10{,}3 \frac{m}{s} \right)$$

Podstawiając do (10):

$$s_w(T) = s_z(T) = v_w(0)T - \frac{\alpha T^3}{6} (= 205{,}4m)$$

Zadanie 5

- Samochód bierze zakręt o kącie $\theta=90°$ i promieniu $R=20$m. Z jaką maksymalną prędkością może on jechać aby koła nie oderwały się od asfaltu? Załóż, że samochód jest złożony z jednorodnego prostopadłościanu o szerokości $s=2$ m, długości $d=4$ m i wysokości $h=1{,}5$ m umieszonego na 4 kołach w kształcie jednorodnych walców o promieniu $r=30$ cm i grubości $w=20$ cm w ten sposób, że oś kół pokrywa się z dolną podstawą prostopadłościanu, zaś zewnętrzne podstawy kół pokrywają się z powierzchniami bocznymi prostopadłościanu. Współczynnik tarcia opon o nawierzchnię jest nieskończony.



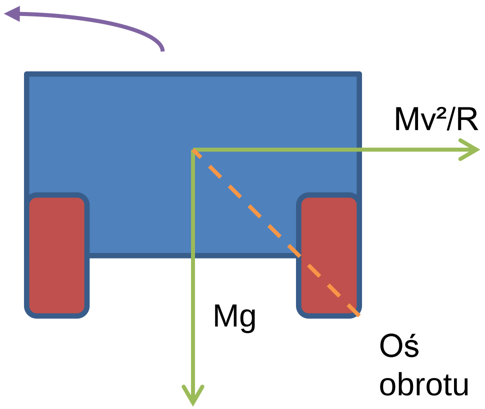
Zadanie 5 - rozwiązanie

- Aby koła samochodu nie oderwały się od ziemi moment siły wypadkowej działającej na środek masy względem osi obrotu przechodzącej przez zewnętrzne koło musi być skierowany ku ziemi. Oznacza to warunek, że w granicznym przypadku siła wypadkowa działająca na samochód jest s kierowana w kierunku osi obrotu:

$$\frac{Mg}{\frac{Mv^2}{R}} > \frac{\frac{h}{2}+r}{\frac{s}{2}}$$

$$\frac{gR}{v^2} > \frac{h+2r}{s}$$

$$v < \sqrt{\frac{gRs}{h+2r}} = 15{,}1\frac{m}{s} = 54{,}5\frac{km}{h}$$



Zadanie 6

- Współczynnik tarcia dynamicznego na mokrej nawierzchni asfaltowej wynosi 0.3, zaś statycznego wynosi 0.95. Samochód jest jednorodną bryłą o masie 1 tony. Silnik ma moc maksymalną 77 kW. Oblicz jaki minimalny czas jest potrzebny na rozpędzenie stojącego samochodu do prędkości 100 km/h jeśli napęd przenoszony jest jedynie na przednią oś.

Zadanie 6 -rozwiązanie

- Napęd przenoszony na przednią oś oznacza że dla przednich kół mamy siłę ciągu równą sile tarcia statycznego (jeśli nie ma poślizgu, a to oznacza minimalny czas przyspieszania) o ile jest ona mniejsza od wartości maksymalnej tarcia statycznego. Koła tylne nie wprowadzają nic do bilansu siły.
  - Sprawdzamy wartości maksymalne sił :

$$T_s = \frac{\mu_s M g}{2} = 4750N$$

$$F = \frac{P}{v} \in \left(770N;\infty\right)$$

  - Jeśli samochód ma przyspieszać z maksymalnym przyspieszeniem siła F (a więc także chwilowa moc samochodu) musi być równa w każdej chwili maksymalnej wartości siły T_s aż do osiągnięcia pełnej mocy czyli prędkości:

$$F_1 = 4750N \qquad v_0 = 0 \qquad v_1 = \frac{2P}{\mu_s M g} = 16{,}2\frac{m}{s} = 58{,}4\frac{km}{h}$$

Zadanie 6 -rozwiązanie

- Następnie samochód przyspiesza z siłą ciągu wynikającą z maksymalnej mocy

$$F_2 = m\frac{dv}{dt} = \frac{P}{v} \qquad\qquad v_2 = 100\frac{km}{h} = 27{,}8\frac{m}{s}$$

- Zależność prędkości samochodu od czasu będzie więc wyrażać się funkcją:

$$v(t) = \begin{cases} v_0 + \dfrac{F_1}{M}t & dla\, 0 < t < t_1 \\ \sqrt{v_1^2 + \dfrac{2P}{M}(t - t_1)} & dla\, t_1 < t < t_2 \end{cases}$$

$$v(0) = 0$$

$$v(t_1) = v_1 = 16{,}2\frac{m}{s}$$

$$v(t_2) = v_2 = 27{,}8\frac{m}{s}$$

z czego

$$t_2 = \frac{M\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2P} + \frac{Mv_1}{F_1} \cong 6{,}7s$$

Zadanie 7

- Żaba podczas skoku wybija się osiągając maksymalne przyspieszenie 54 m/s^2. Czas kontaktu z ziemią wynosi 80ms. Zakładając że zmiana przyspieszenia w czasie jest opisana funkcją Gaussa o odchyleniu standardowym 19ms i średniej 40ms. Oblicz maksymalną prędkość oraz długość nóg żaby.

  Wskazówka: przyspieszenie w chwilach t=0 i t=80ms jest różne od zera.

  Przydatne wzory:

$$\int e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} erf(x)$$

$$\int erf(x)dx = x\,erf(x) + \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$erf(x) = -erf(-x)$$

$$erf(x) \cong \frac{2}{1+\exp\left(-1.7\sqrt{2}x\right)} - 1$$

Zadanie 7 - rozwiązanie

- Skoro przyspieszenie żaby jest opisane funkcją Gaussa, wyrażać się będzie wzorem:

$$a(t) = a_{\max} \exp \frac{(t - t_{\max})^2}{2\sigma^2}$$

gdzie a_{max} jest przyspieszeniem maksymalnym (54 m/s^2), zaś t_{max} jest czasem po którym to przyspieszenie jest osiągane (40ms)

- Równanie na prędkość żaby:

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a_{\max} \exp \frac{(t - t_{\max})^2}{2\sigma^2} dt$$

$$v(t) = \frac{a_{\max}\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{2}\sigma\left[erf\left(\frac{t - t_{\max}}{\sqrt{2}\sigma}\right) - erf\left(\frac{t_0 - t_{\max}}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_{\max}\sigma\left[erf\left(\frac{t_k - t_{\max}}{\sqrt{2}\sigma}\right) + erf\left(-\frac{t_0 - t_{\max}}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]$$

$$\frac{t_k - t_{\max}}{\sqrt{2}\sigma} = -\frac{t_0 - t_{\max}}{\sqrt{2}\sigma} = 1{,}49 \qquad erf(1{,}49) = 0{,}965 \qquad v_{\max} = 2{,}48\frac{m}{s}$$

Zadanie 7 - rozwiązanie

- Równanie na położenie żaby (długość nóg będzie zmianą położenia żaby w trakcie wyskoku):

$$x(t_k)=\int_0^{t_k}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}a_{\max}\sigma\, erf\left(\frac{t-t_{\max}}{\sqrt{2}\sigma}\right)+\frac{v_{\max}}{2}\right]dt$$

stosując podstawienia:

$$\tilde{t}=\frac{t-t_{\max}}{\sqrt{2}\sigma} \qquad dt=\sqrt{2}\sigma d\tilde{t} \qquad t_{\max}=\frac{t_k}{2}$$

$$x(t_k)=\int_{-\frac{t_k}{2\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{t_k}{2\sqrt{2}\sigma}}\sqrt{\pi}\sigma^2 a_{\max}\, erf(\tilde{t})d\tilde{t}+\int_0^{t_k}\frac{v_{\max}}{2}dt$$

Ponieważ funkacja erf(x) jest nieparzysta, symetryczna całka z niej będzie równa 0, z czego:

$$x(t_k)=\frac{v_{\max}t_k}{2}=9{,}9cm$$

Zadanie 8

- Laserowy miernik prędkości wykonuje pomiar w ciągu 0,3 s wysyłając impulsy światła i mierząc różnicę w czasie ich powrotu po odbiciu od pojazdu. Oblicz jak precyzyjny musi być zegar urządzenia aby zmierzyć prędkość maksymalną 400 km/h.

Zadanie 8 - rozwiązanie

- Czas przelotu impulsu świetlnego na odległość x wynosi:

$$t_1 = \frac{2x}{c}$$

W czasie 0,3 s pomiaru samochód z prędkością 400 km/h przebędzie drogę

$$s = vt_p = 33{,}3m$$

Zauważmy, że prędkość samochodu jest zaniedbywalna w porównaniu z prędkością światła. Kolejny impuls światła będzie więc leciał krócej niż poprzedni o

$$t_1 - t_2 = \frac{2x}{c} - \frac{2(x-s)}{c} = \frac{2s}{c} \cong 0{,}2\mu s$$

Precyzja zegara musi więc co najmniej dwa razy większa, tj. rzędu 0,1 μs

Zadanie 9

- Skoczek spadochronowy o masie 60 kg po wyskoczeniu z samolotu spada w pozycji płaskiej osiągając stałą prędkość 50 m/s. Po jakim czasie skoczek osiągnie maksymalna prędkość? Po jakim czasie prędkość skoczka, będzie się różnić od maksymalnej o mniej niż 1 %?

Zadanie 9 - rozwiązanie

- Po osiągnięciu prędkości maksymalnej (stałej) siła oporu powietrza jest równa ciężarowi skoczka, z czego:

$$mg = \beta v_{\max}$$

$$\beta = \frac{mg}{v_{\max}}$$

- Równanie różniczkowe na prędkość skoczka:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \beta v$$

$$\int_0^t dt = m\int_0^v \frac{dv}{mg - \beta v}$$

$$t = -\frac{m}{\beta}\ln\frac{mg - \beta v}{mg} = -\frac{v_{\max}}{g}\ln\left(1 - \frac{v_{\max}}{v}\right) \xrightarrow{v = v_{\max}} \infty \qquad \xrightarrow{v = 0{,}99 v_{\max}} \quad \frac{6{,}9 v_{\max}}{g} = 23s$$

$$v(t) = \frac{mg}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) = v_{\max}\left(1 - e^{-\frac{gt}{v_{\max}}}\right)$$

Zadanie 10

- Fontanna Jet d'eau w Genewie wyrzuca wodę z prędkością 195 km/h. Jaka jest wysokość fontanny i z jakiej odległości trzeba obserwować fontannie przy wietrze wiejącym w twarz z prędkością 35 m/s aby pozostać suchym? Potraktuj wodę jako zbiór kropel o masie 50mg i przyjmij, że prędkość wiatru jest pozioma i stała na całym dystansie, a współczynnik oporu powietrza wynosi $6{,}4\times10^{-7}$ Ns^2/m.

Zadanie 10 - rozwiązanie

- Równanie na prędkość kropli w pionie

$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg - \beta v_y$$

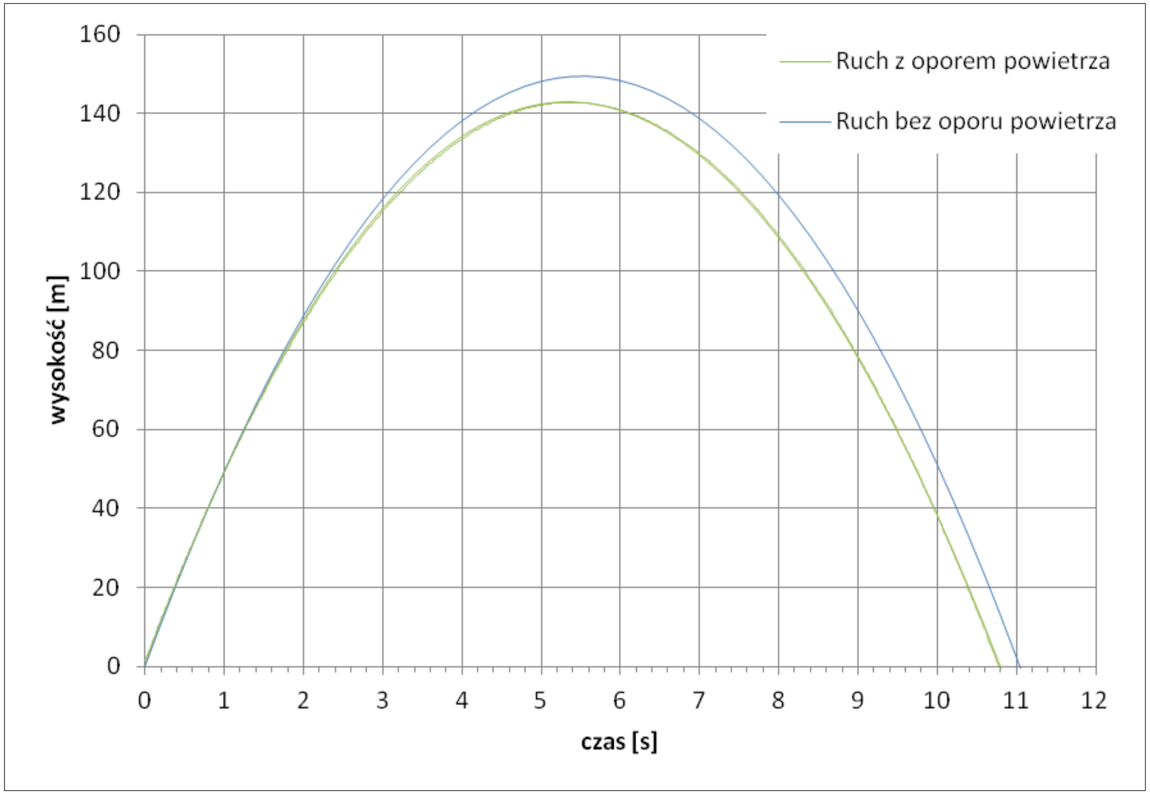
$$\int_0^t dt = m\int_{v_0}^{v_y} \frac{dv_y}{-mg-\beta v_y}$$

$$t = -\frac{m}{\beta}\ln\frac{mg+\beta v_y}{mg+\beta v_0} \xrightarrow{v=0} t = 5{,}34s$$

$$(mg+\beta v_0)e^{-\frac{\beta t}{m}} = mg + \beta v_y$$

$$v_y(t) = v_0 e^{-\frac{\beta t}{m}} + \frac{mg}{\beta}\left(e^{-\frac{\beta t}{m}} - 1\right)$$

$$v_y(t) \xrightarrow{\frac{mg}{\beta}=v_{\max}} v_0 e^{-\frac{\beta t}{m}} + v_{\max}\left(e^{-\frac{\beta t}{m}} - 1\right)$$



- Pozycja w pionie

$$y = \int_0^t v_y dt = \int_0^y \left[v_0 e^{-\frac{\beta t}{m}} + \frac{mg}{\beta}\left(e^{-\frac{\beta t}{m}} - 1\right)\right]dt$$

$$y = -\frac{m}{\beta}(v_0 + v_{\max})\left(e^{-\frac{\beta t}{m}} - 1\right) - v_{\max}t$$

$$y_{\max} \xrightarrow{t=5,64s} 142{,}9m$$

$$y = 0 \xrightarrow{graficznie} t = 10{,}8s$$

Zadanie 10 - rozwiązanie

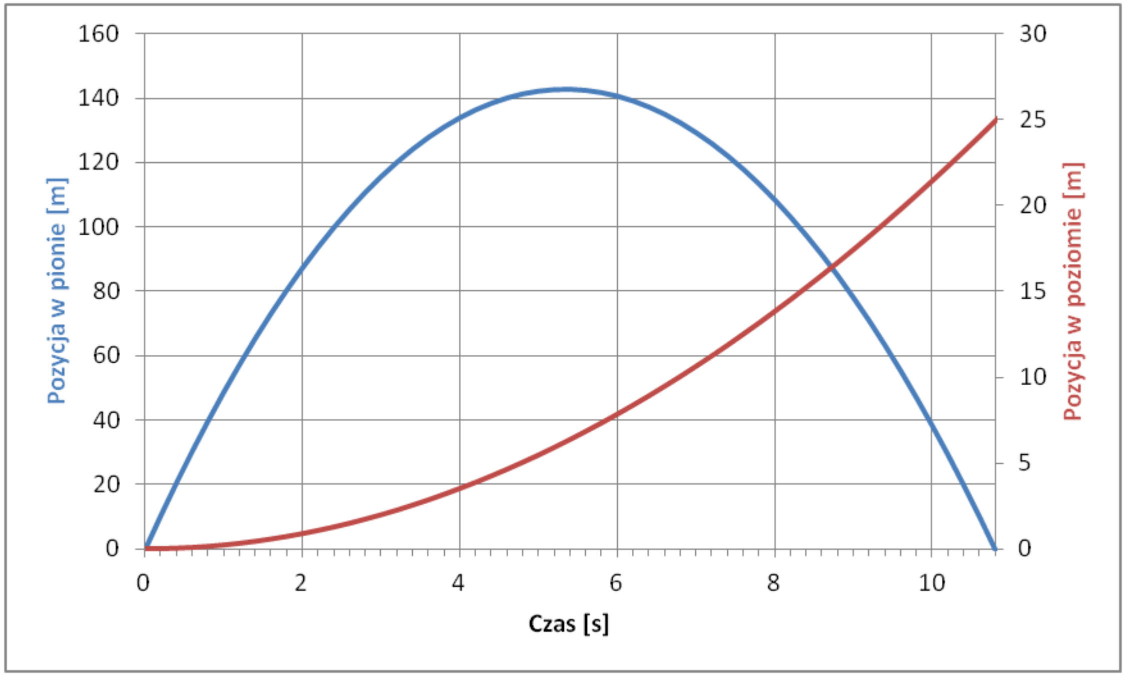
- Prędkość w poziomie

$$m\frac{dv_x}{dt} = \beta(v_w - v_x)$$

$$\int_0^t dt = \frac{m}{\beta}\int_0^{v_x}\frac{dv}{v_w - v_x}$$

$$t = -\frac{m}{\beta}\ln\left(1 - \frac{v_x}{v_w}\right)$$

$$v_x(t) = v_w\left(1 - e^{-\frac{\beta t}{m}}\right)$$



- Pozycja w poziomie

$$x = \int_0^t v_x dt = \int_0^y v_w\left(1 - e^{-\frac{\beta t}{m}}\right)dt$$

$$x(t) = v_w t + \frac{v_w m}{\beta}\left(e^{-\frac{\beta t}{m}} - 1\right)$$

$$x_{\max} \xrightarrow{t=10,8s} 24,9m$$