Mechanika cz. 2

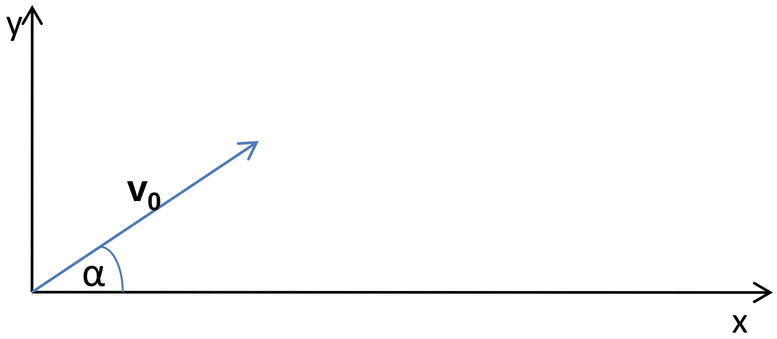
Zadania z rozwiązaniami

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

Kulkę o masie m wyrzucono z prędkością v_0 pod kątem α do poziomu. Znaleźć wartość momentu pędu kulki względem punktu z którego została wyrzucona w funkcji czasu. Dane: g- przyspieszenie ziemskie.

Rozwiązanie:



Moment pędu definiujemy następująco:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Wektor położenia ma postać:

$$\vec{r} = [r_x, r_y] = [v_0 \cos\alpha * t, v_0 \sin\alpha * t - \frac{gt^2}{2}]$$

I wektor pędu:

$$\vec{p} = [p_x, p_y] = [m * v_0 \cos\alpha, m * (v_0 \sin\alpha - gt)]$$

Szukamy wartości momentu pędu korzystając z definicji iloczynu wektorowego:

$$|\vec{r} \times \vec{p}| = |r_x p_y - r_y p_x| =$$

$$|mv_o^2 \sin\alpha \cos\alpha * t - mv_o g \cos\alpha * t^2 - mv_o^2 \sin\alpha \cos\alpha * t + \frac{1}{2} mgv_0 \cos\alpha * t| =$$

$$|-\frac{1}{2} mgv_0 \cos\alpha * t^2|$$

Tak więc poszukiwana wartość momentu pędu ma postać:

$$\left|\vec{L}\right| = \frac{1}{2} mgv_0 \cos\alpha * t$$

Zadanie 2

Dwaj rozbitkowie o masach m_1 i m_2 siedzą na tratwie o masie m_0, odległość między nimi wynosi L. O ile przesunie się tratwa jeżeli rozbitkowie zamienia się miejscami? Opór wody pominąć.

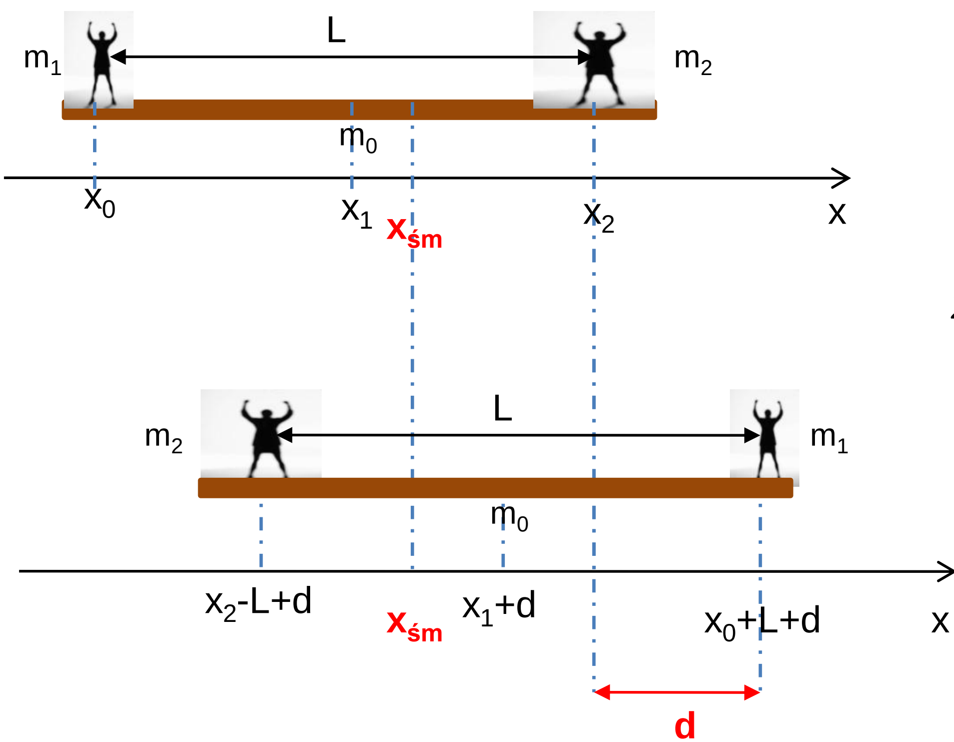
Równanie opisujące położenie środka masy:

$$x_{śm} = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}$$

Rozwiązanie:

Ponieważ pęd układu (rozbitkowie + tratwa) w układzie odniesienia związanym z brzegiem jest równy zero, to położenie środka masy po zamianie miejscami nie ulegnie zmianie. Zakładając, że współrzędne środków mas rozbitków i tratwy przed zamiana, są odpowiednio równe: m_1-x_0, m_0-x_1, m_2-x_2, możemy napisać równanie opisujące położenie środka masy przed zamianą rozbitków miejscami:

$$x_{śm} = \frac{m_1 x_0 + m_0 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_0 + m_2}$$



Po zamianie miejscami tratwa przemieści się na odległość d, więc położenie środka masy opiszemy równaniem:

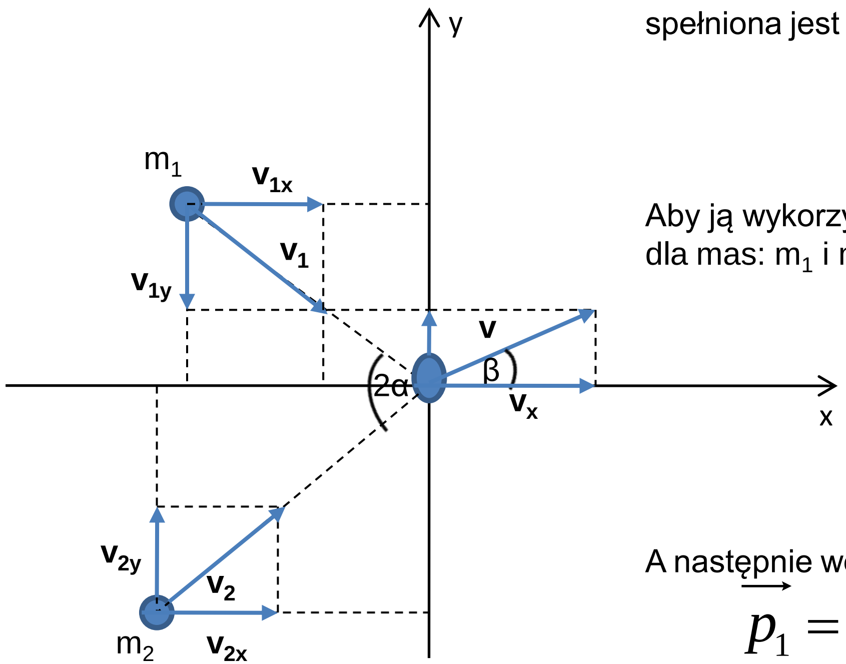
$$x_{śm} = \frac{m_1(x_0 + L + d) + m_0(x_1 + d) + m_2(x_2 - L + d)}{m_1 + m_0 + m_2}$$

Ponieważ podłożenie środka masy względem brzegu nie zmienia się, więc porównując powyższe równania otrzymujemy odległość d o jaką przesunie się tratwa :

$$d = \frac{L(m_2 - m_1)}{m_1 + m_0 + m_2}$$

Zadanie 3

Dwie plastelinowe kulki o masach m_1 i m_2 poruszają się z prędkościami odpowiednio v_1 i v_2 w kierunkach nachylonych pod katem α do osi x układu współrzędnych. Kulki zderzają się w początku układu współrzędnych i zlepiają się. Pod jakim kątem do osi x i z jaka prędkością będą się poruszały kulki po zlepieniu?



Rozwiązanie:

Ponieważ na układ nie działają żadne siły zewnętrze, to dla opisanego zderzeniea spełniona jest zasada zachowania pędu:

$$\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p} \qquad (1)$$

Aby ją wykorzystać należy na początku napisać wektory prędkości v_1 i v_2 odpowiednio dla mas: m_1 i m_2:

$$\overrightarrow{v_1} = [v_{1x}, v_{1y}] = [v_1 \cos\alpha, -v_1 \sin\alpha]$$

$$\overrightarrow{v_2} = [v_{2x}, v_{2y}] = [v_2 \cos\alpha, v_2 \sin\alpha]$$

A następnie wektory pędu dla obu mas:

$$\overrightarrow{p_1} = m_1[v_{1x}, v_{1y}] = [m_1 v_1 \cos\alpha, -m_1 v_1 \sin\alpha]$$

$$\overrightarrow{p_2} = m_2[v_{2x}, v_{2y}] = [m_2 v_2 \cos\alpha, m_2 v_2 \sin\alpha]$$

Wykorzystując zasadę zachowania pędu (1) obliczmy wektor pędu masy (m_1 + m_2) powstałej w wyniku zlepienia kulek:

$$\overrightarrow{p} = [m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\alpha, -m_1 v_1 \sin\alpha + m_2 v_2 \sin\alpha]$$

$$\overrightarrow{p} = [(m_1 v_1 + m_2 v_2)\cos\alpha, (m_2 v_2 - m_1 v_1)\sin\alpha] \qquad (2)$$

Wykorzystując składowe wektora pędu (równanie (2)), wyznaczam kąt pod jakim będzie skierowany wektor prędkości zlepionych kulek:

$$tg\beta = \frac{p_y}{p_x} = \frac{(m_2 v_2 - m_1 v_1)\sin\alpha}{(m_1 v_1 + m_2 v_2)\cos\alpha} = \frac{(m_2 v_2 - m_1 v_1)}{(m_1 v_1 + m_2 v_2)} tg\alpha$$

Wektor prędkości zlepionych kulek wyznaczamy z równania (2):

$$\vec{p} = (m_1 + m_2)\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{p}}{(m_1 + m_2)}$$

$$\vec{v} = \frac{1}{(m_1 + m_2)}[(m_1 v_1 + m_2 v_2)\cos\alpha, (m_2 v_2 - m_1 v_1)\sin\alpha]$$

A wartość tej prędkości będzie równa:

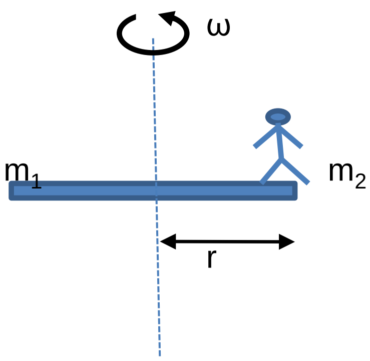
$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\left|\vec{v}\right| = \frac{1}{(m_1 + m_2)}\sqrt{[(m_1 v_1 + m_2 v_2)\cos\alpha]^2 + [(m_2 v_2 - m_1 v_1)\sin\alpha]^2}$$

Zadanie 4

Na brzegu poziomego stolika o masie m_1 i promieniu r wirującego z częstotliwością ω dookoła pionowej osi przechodzącej przez jego środek stoi człowiek o masie m_2. Z jaką prędkością kątową będzie się obracał stolik, gdy człowiek przejdzie na jego środek? O ile zmieni się przy tym energia kinetyczna układu stolik człowiek? Człowieka traktujemy jak punkt materialny, stolik zaś, jak krążek o momencie bezwładności $I = 1/2\ m_1 r^2$. Tarcie w łożyskach pominąć.

Rozwiązanie: Ponieważ na układ nie działają żadne siły zewnętrzne, wypadkowy moment siły równa się zero, więc dla opisanej sytuacji spełniona jest zasada zachowania momentu pędu:



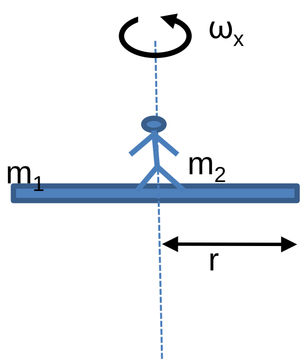
$$L_p = L_k \Rightarrow I_p \omega = I_k \omega_x \qquad (1)$$

Moment bezwładności układu jest sumą momentu pędu tarczy i człowieka. Człowieka traktujemy jako masę punktową, a więc moment bezwładności wyznaczamy z równania: $I=mR^2$ (gdzie R jest odległością masy od osi obrotu). Początkowy moment bezwładności układu wynosi:

$$I_p = \frac{1}{2} m_1 r^2 + m_2 r^2 \qquad (2)$$

Ponieważ po przejściu człowieka na środek tarczy jego odległość od osi obrotu wynosi 0, więc R=0 i końcowy moment bezwładności układu będzie równy:

$$I_k = \frac{1}{2} m_1 r^2 + O \qquad (3)$$



Podstawiając (2) i (3) do (1) otrzymujemy końcową prędkość kątową ω_x :

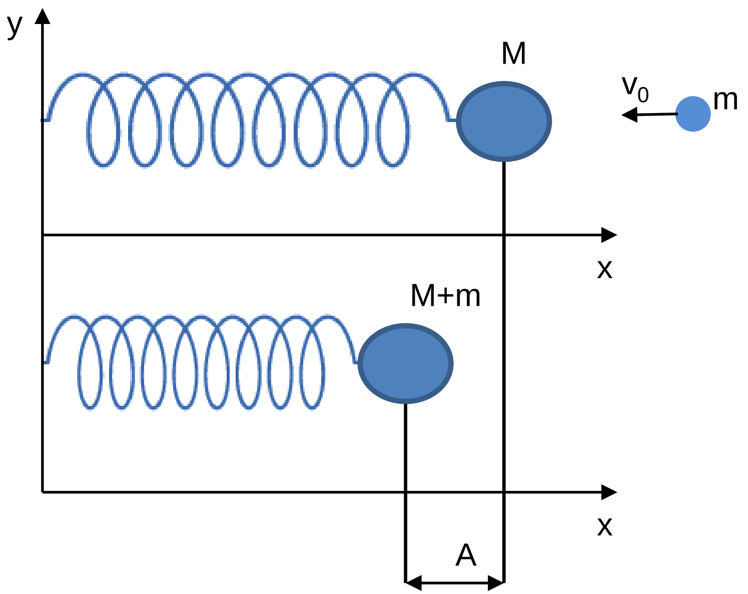
$$\omega_x = \frac{\left(\frac{1}{2} m_1 r^2 + m_2 r^2\right)\omega}{\frac{1}{2} m_1 r^2}$$

A energia kinetyczna zmieni się o wartość:

$$E_{kk} - E_{kp} = \frac{I_k \omega_k^2}{2} - \frac{I_p \omega_p^2}{2} = \left(\frac{1}{2} m_1 r^2 + m_2 r^2\right)\frac{m_2}{m_1}\omega^2$$

Zadanie 5
Kula o masie M zaczepiona jest do sprężyny (tak jak na rysunku) w kulę uderza pocisk o masie m z prędkością v_0. Współczynnik sprężystości sprężyny wynosi k, a kula znajduje się na gładkiej powierzchni. Obliczyć amplitudę i okres drgań kuli jeżeli zderzenie kuli z pociskiem jest niesprężyste.
Rozwiązanie: Aby obliczyć amplitudę wykorzystamy zasadę zachowania energii. Energia kinetyczna układu w chwili zderzenia zużyta zostanie na energie potencjalną sprężyny:

$$\frac{(m+M)v^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \qquad (1)$$



Prędkość układu kula – pocisk zostanie obliczona z zasady zachowania pędu:

$$mv_0 = (m+M)v$$

$$v = \frac{mv_0}{m+M} \qquad (2)$$

Wstawiając (2) do (1) otrzymujemy: $$\frac{(m+M)}{2}\left(\frac{mv_0}{m+M}\right)^2 = \frac{kA^2}{2}$$

Stąd wyznaczamy amplitudę drgań: $$A = mv_0\sqrt{\frac{1}{k(m+M)}}$$

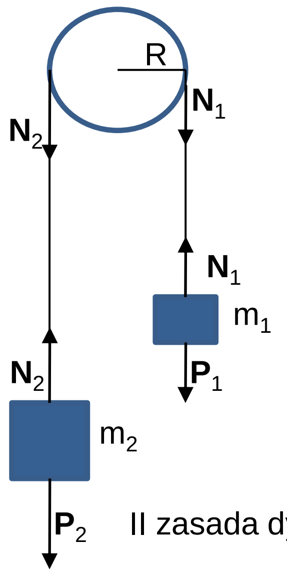
Okres drgań wyznaczamy korzystając z zależności na częstość kołową: $\omega = \sqrt{\frac{k}{(m+M)}}$ gdzie: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Uwzględniając dwie powyższe zależności otrzymujemy poszukiwany okres drgań: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{(m+M)}{k}}$$

Zadanie 6

Przez bloczek zawieszony na poziomej osi przerzucono nieważką i nierozciągliwą nić, do końców której przymocowano ciężarki o masach m_1 i m_2. Masa bloczka wynosi M. Bloczek traktujemy jako jednorodny krążek. Znajdź liniowe przyspieszenie ciężarków. Przyjmujemy, że nić nie ślizga się po bloczku.

Rozwiązanie: Zadanie to rozwiążemy wykorzystując II zasadę dynamiki zarówno dla ruchu postępowego: masy m_1 i m_2, jak i obrotowego - masa M. Na początku należy rozrysować wszystkie siły działające na poszczególne masy.



II zasada dynamika dla masy m_1 w postaci wektorowej:

$$m_1\vec{a} = \vec{N}_1 + \vec{P}_1$$

I w postaci skalarnej, uwzględniając zwrot przyspieszenia:

$$m_1 a = N_1 - P_1$$

I analogicznie dla m_2:

$$m_2\vec{a} = \vec{N}_2 + \vec{P}_2$$

$$m_2 a = P_2 - N_2$$

gdzie: $P_1=m_1g$ i $P_2=m_2g$.

II zasada dynamika dla masy M:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{N_1} + \vec{M}_{N_2} + \vec{M}_P$$

Gdzie moment bezwładności krążka względem osi przechodzącej przez środek równa się $0.5MR^2$, a literą M oznaczone zostały poszczególne momenty sił. Uwzględniając zwroty wektorów otrzymujemy równanie w postaci skalarnej:

$$I\varepsilon = RN_2\sin 90° - RN_1\sin 90°$$

Wykorzystując zależność: $\varepsilon = \frac{a}{R}$,

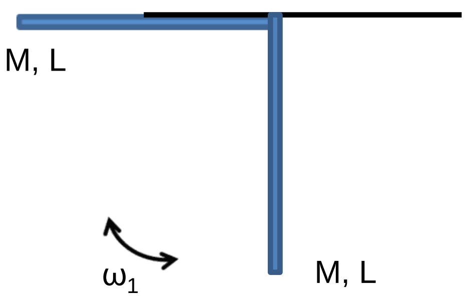
otrzymujemy układ trzech równań:

$$\begin{cases} m_1 a = N_1 - m_1 g \\ m_2 a = m_2 g - N_2 \\ \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} = RN_2 - RN_1 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań dostajemy liniowe przyspieszenie układu:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}$$

Zadanie 7
Dwa jednakowe jednorodne pręty są zawieszone pod sufitem. Jeden z nich odchylono o 90° i puszczono swobodnie. Pod jakim kątem odchyla się pręty, po zderzeni całkowicie niesprężystym.
Rozwiązanie:
Zakładamy, że pręty mają długość L i masę M. Opisaną w zadaniu sytuację dzielimy na trzy etapy:



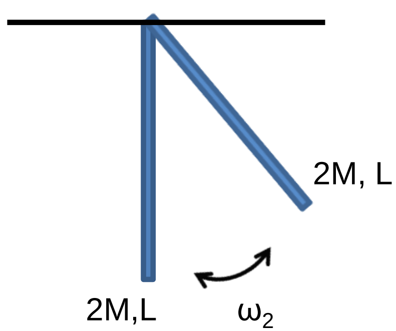
Etap I. Wykorzystując zasadę zachowanie energii, obliczamy prędkość kątową z jaką odchylony pręt uderzy w zawieszony pręt:

$$Mg\frac{l}{2} = \frac{I\omega_1}{2} \qquad (1)$$

Ponieważ pręt obraca się względem swojego końca, korzystając z twierdzenia Steinera określamy moment bezwładności pręta względem osi pokrywającej się z osią obrotu:

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^2 M = \frac{1}{3}ML^2 \qquad (2)$$

Po podstawieniu (2) do (1) o trzymujemy: $$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{L}} \qquad (3)$$

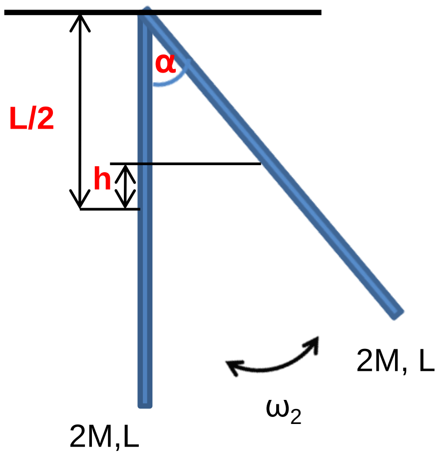


Etap II. Wykorzystując zasadę zachowania momentu pędu obliczam prędkość kątową z jaką będą poruszać się dwa pręty po zderzeniu całkowicie niesprężystym:

$$I\omega_1 = 2I\omega_2$$

Czyli, po uwzględnieniu równania (2) i (3), otrzymujemy:

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{L}} \qquad (4)$$



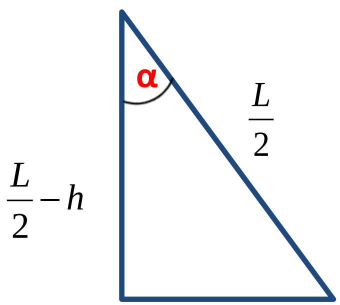
Etap III. Tym razem wykorzystując zasadę zachowania energii wyznaczamy wysokość na jaką wzniosą się pręty po zderzeniu:

$$\frac{2I\omega_2^2}{2} = 2mgh$$

Wykorzystując (2) i (4) uzyskujemy h:

$$h = \frac{1}{8}L \qquad (5)$$

Mając wysokość na jaka wzniosą się pręty wyznaczamy poszukiwany kąt:



$$\cos\alpha = \frac{\frac{L}{2} - h}{\frac{L}{2}}$$

Wykorzystując (5) otrzymujemy rozwiązanie:

$$\cos\alpha = \frac{3}{4}$$

Zadanie 8

Z równi pochyłej o kącie nachylenia α do poziomu stacza się bez poślizgu jednorodny walec o masie m. Obliczyć wartość działającej w tym ruchu siły tarcia. Moment bezwładności walca względem jego środka I=1/2 mr^2.Dane jest przyspieszenie ziemskie g.

Rozwiązanie:

Zadanie to zostanie rozwiązane dwoma sposobami. Oto pierwszy sposób:

Piszemy drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$I\varepsilon = rT\sin 90^\circ \qquad (1)$$

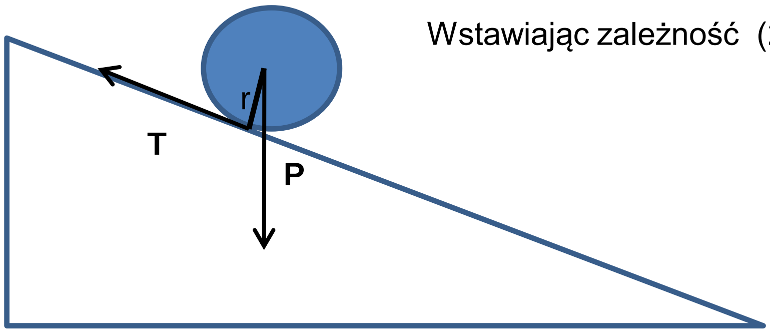
(moment siły dla siły ciężkości równy jest zero, ponieważ ramię siły =0)

i postępowego:

$$ma = mg\sin\alpha - T \qquad (2)$$

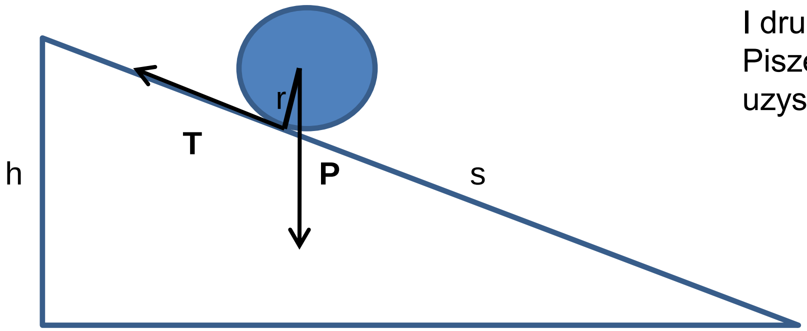
Do równania pierwszego podstawimy następujące zależności: I=1/2 mr^2 i ε=a/r otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}mr^2\frac{a}{r} = Tr \Rightarrow T = \frac{1}{2}ma \qquad (3)$$



Wstawiając zależność (2) do (3) dostajemy rozwiązanie:

$$T = \frac{1}{3}mg\sin\alpha$$



I drugi sposób:
Piszemy zasadę zachowania energii, aby wyznaczyć prędkość liniową, jaką uzyska staczający się walec na końcu równi :

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Energia potencjalna, jaką posiada walec na szczycie równi zostanie zamieniona na energię kinetyczną ruchu obrotowego i ruchu postępowego. Wiedząc, że $I=1/2\ mr^2$, $\omega=v/r$ i $h=s\sin\alpha$ otrzymujemy:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} gs\sin\alpha} \qquad (1)$$

Wykorzystując fakt, że praca wykonana na drodze s przez wypadkową siłę działającą na walec jest równa zmianie energii kinetycznej otrzymujemy:

$$W = \Delta E_K = E_{KK} - E_{KP} = E_{KK}$$

$$(mg\sin\alpha - T)s * \cos 0° = \frac{mv^2}{2} \qquad (2)$$

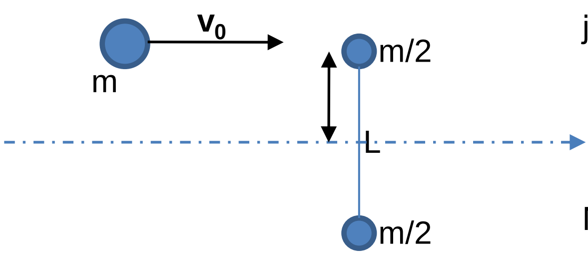
Wstawiając (1) do (2) uzyskujemy następujący wynik:

$$T = \frac{1}{3} mg\sin\alpha$$

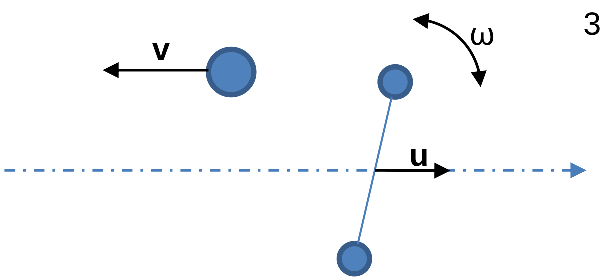
Zadanie 9

Kulka o masie m poruszająca się z prędkością v_0 zderza się sprężyście z jedną z kul doskonale sprężystej hantli. Zderzenie jest centralne. Masa każdej z kul hantli wynosi m/2, a odległość między nimi jest równa L. Zaniedbując rozmiary kul znaleźć moment pędu hantli względem jej środka masy.

Przed zderzeniem:



Po zderzeniu:



Rozwiązanie:

1. Ponieważ wypadkowa siła zewnętrza równa się zero, spełniona jest zasada zachowania pędu:

$$mv_0 = -mv + mu \qquad (1)$$

2. Ponieważ wypadkowy moment sił zewnętrznych równa się zero, to spełniona jest zasada zachowania momentu pędu:

$$\frac{L}{2} mv_0 \sin 90° = -\frac{L}{2} mv \sin 90° + I\omega \qquad (2)$$

Moment bezwładności hantli wyznaczamy z twierdzenia Steinera:

$$I = \frac{1}{2} m \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} mL^2 \qquad (3)$$

3. Ponieważ nie ma strat energii, to spełniona jest również zasada zachowania energii:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \qquad (4)$$

Rozwiązując układ czterech równań (1) –(4) otrzymujemy rozwiązanie:

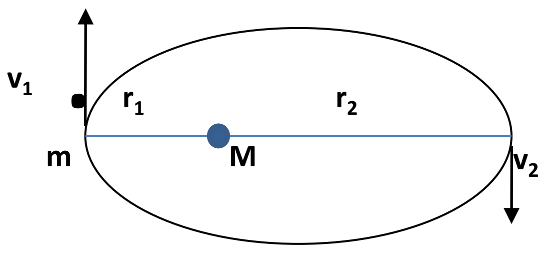
$$L = \frac{1}{3} mLv_0$$

Zadanie 10

Mała planeta o masie m porusza się po torze eliptycznym wokół gwiazdy o masie M. Gwiazda znajduje się w jednym z ognisk elipsy. Wyznaczyć stosunek momentów pędu i energii kinetycznych w punktach maksymalnego i minimalnego oddalenia od gwiazdy. Odległości r_1 i r_2 przyjąć za dane.

Rozwiązanie: Ruch planety wokół gwiazdy możemy traktować jako ruch punktu materialnego w polu siły centralnej. W polu siły centralne spełniona jest zasada momentu pędu, ponieważ moment siły równa się zero. Siła skierowana jest wzdłuż promienia korzystając z definicji na moment siły: M=rFsin0°=0.

Zapisując zasadę momentu pędu dla punktów minimalnego (r_1) i maksymalnego (r_2) odchylenia otrzymujemy:



$$r_1 m v_1 \sin 90^\circ = r_2 m v_2 \sin 90^\circ$$

$$r_1 v_1 = r_2 v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Obliczamy stosunek energii kinetycznych:

$$\frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{\frac{m v_1^2}{2}}{\frac{m v_2^2}{2}} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

I ostateczna odpowiedź:

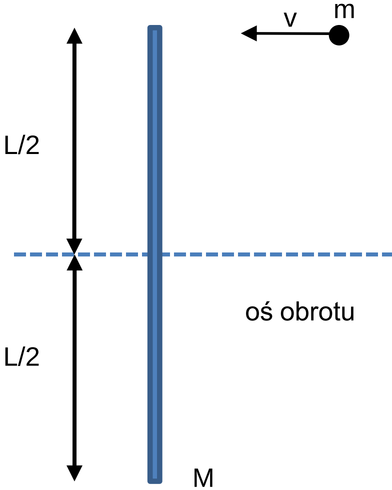
$$\frac{L_1}{L_2} = 1; \frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

Zadanie 11

Jednorodny pręt drewniany o masie M i długości L zamocowany jest tak, że może obracać się tylko wokół osi poziomej prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego środek. W koniec pręta uderza pocisk o masie m lecący z prędkością v skierowana tak, jak na rysunku. Obliczyć prędkość kątową ω_x pręta, jeżeli pocisk utkwił w pręcie a pręt przed uderzeniem był w spoczynku.

Rozwiązanie: Zastanówmy się jakie zasady zachowania są spełnione w tym zderzeniu:

1. Zasada zachowania pędu – warunek stosowalności z.z.p. to $\sum \vec{F} = 0$, w tym przypadku mamy niezrównoważoną siłę, która działając w miejscu zamocowania pręta uniemożliwia jego ruch postępowy, tak więc z.z.p. jest niespełniona.
2. Zasada zachowania momentu pędu – aby można było ją zastosować, wypadkowy moment siły musi być równy zero,. Ponieważ siła działa na osi obrotu, więc jej moment jest równy zero i tym samym dla przedstawionego w zadaniu zderzenia można zastosować tę zasadę.



Moment pędu przed zderzeniem:

$$\overrightarrow{L_p} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow L_p = \frac{L}{2} mv \sin 90^\circ \Rightarrow L_p = \frac{L}{2} mv \qquad (1)$$

Moment pędu po zderzeniu wyznaczamy z wzoru $L=I_k\omega_x$, gdzie I_k, jest momentem bezwładności układu pręt + pocisk i równa się:

$$I_k = \frac{1}{12} ML^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

I stąd moment pędu:

$$L_k = \left(\frac{1}{12} ML^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\omega_x \qquad (2)$$

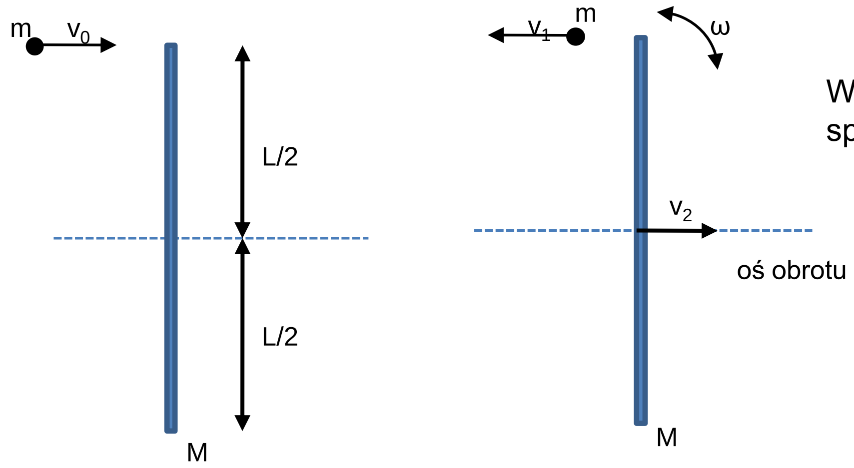
A ponieważ spełniona mamy zasadę momentu pędu: $L_p = L_k$ (3)

To wstawiając (1) i (2) do (3) otrzymujemy prędkość kątową ω_x układu po zderzeniu: $\omega_x = \dfrac{2mv}{L\left(\dfrac{M}{3} + m\right)}$

Zadanie 12

W koniec pręta o długości L i masie M, leżącego na gładkim, poziomym stole, uderza prostopadle pocisk o masie m, poruszający się z prędkością v_0. Zderzenie jest sprężyste. Jak zachowa się pręt i krążek po zderzeniu?

Rozwiązanie: Ponieważ pocisk uderza prostopadle w pręt, to po zderzeniu, również będzie się poruszał ruchem postępowym prostopadle do pręta. Jako że pręt zostanie uderzony w punkt różny od środka masy, więc pręt zacznie poruszać się ruchem postępowym i ruchem obrotowym wokół osi przechodzącej przez środek masy. Ponieważ na układ pocisk – pręt nie działają żadne siły zewnętrzne, więc spełniona jest zasada zachowania pędu:



$$mv_0 = -mv_1 + Mv_2 \qquad (1)$$

Wypadkowy moment siły działający na układ wynosi zero, więc spełniona jest zasada zachowania momentu pędu:

$$\frac{L}{2}mv_0\sin 90^\circ = -\frac{L}{2}mv_1\sin 90^\circ + I\omega$$

$$\frac{L}{2}mv_0 = -\frac{L}{2}mv_1 + I\omega \qquad (2)$$

Moment pędu opisujemy względem osi przechodzącej przez środek masy i moment bezwładności pręta względem tej osi wynosi: $I = \frac{1}{12}ML^2$

Spełniona jest również zasada zachowania energii, której postać jest następująca (energia kinetyczna pocisku zostanie po zderzeniu zamieniona na energię kinetyczną pocisku, energię kinetyczną ruchu postępowego i obrotowego pręta):

$$\frac{mv_0^{\,2}}{2} = \frac{mv_1^{\,2}}{2} + \frac{Mv_2^{\,2}}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \qquad (3)$$

Rozwiązując układ trzech równań (1)-(3) otrzymujemy wyrażenia opisujące poszczególne prędkości:

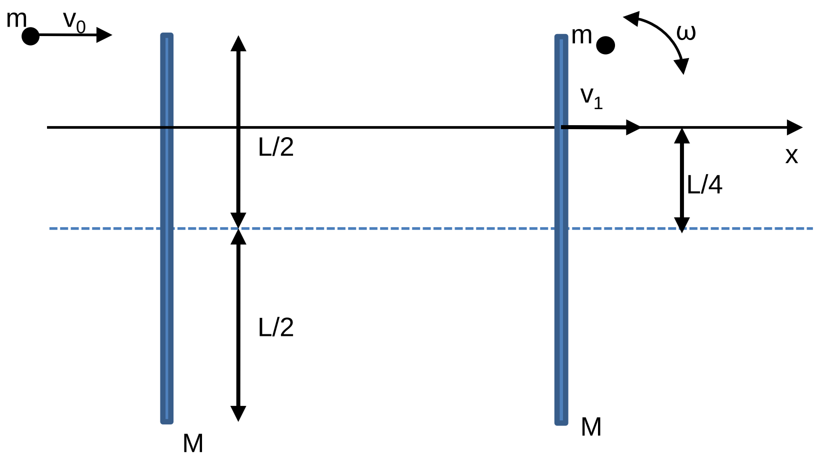
$$v_1 = \frac{M-4m}{M+4m} \qquad v_2 = \frac{2m}{M+4m}v_0 \qquad \omega = \frac{12m}{L(M+4m)}v_0$$

Zadanie 13

Bryłka plasteliny o masie m posiada prędkość v_0. Kierunek prędkości jest prostopadły do pręta o tej samej masie i długości L, leżącego na gładkim, poziomym stole. Plastelina uderza w koniec pręta i przylepia się do niego. Znaleźć prędkość liniową i kątową poruszającego się po zderzeniu układu mas.

Rozwiązanie: Zastanówmy się jakie zasady zachowania są spełnione w tym zderzeniu:

1. Zasada zachowania pędu – ponieważ na układ nie działają żadne siły zewnętrze, więc z.z.p. jest spełniona
2. Zasada zachowania momentu pędu – ponieważ zewnętrzny moment siły wynosi zero, więc z.z.m.p. również jest spełniona
3. Zasada zachowania energii – ponieważ zderzenie jest niesprężyste zasada ta nie będzie spełniona dla tego zderzenia.



Zasada zachowania pędu w tym przypadku ma postać:

$$mv_0 = 2mv_1$$

Z niej wynika, że prędkość ruchu postępowego układu mas po zderzeniu jest równa:

$$v_1 = \frac{v_0}{2}$$

Ponieważ po połączeniu dwóch mas zmienia się środek masy układu, więc to względem osi przechodzącej przez nowy środek masy należy opisać moment pędu i moment bezwładności pręta i bryłki plasteliny. Wyznaczmy na początku położenie środka masy układu pręt-bryłka plasteliny:

$$x_{śm} = \frac{m0 + m\frac{1}{2}L}{2m} = \frac{1}{4}L$$

Zasada zachowania momentu pędu ma postać: $$\frac{L}{4}mv_0 \sin 90° = I\omega \quad (1)$$

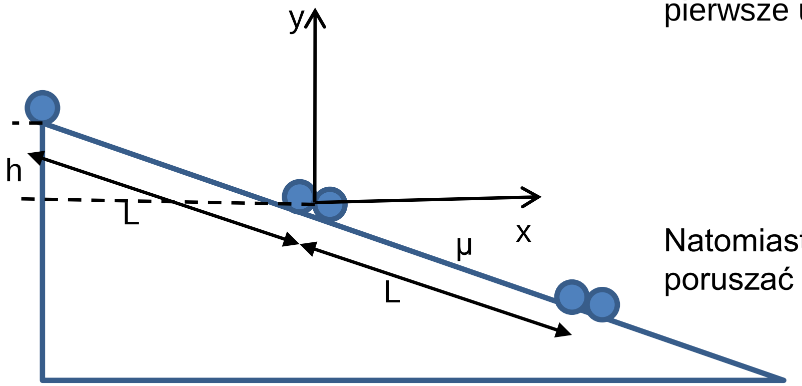
Gdzie I wyznaczamy z twierdzenia Steinera: $I = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{1}{4}L\right)^2 + m\left(\frac{1}{4}L\right)^2$ i wynosi on: $I = \frac{5}{24}mL^2$ (2)

Wstawiając (2) do (1) otrzymujemy szukaną prędkość kątową: $\omega = \frac{6v_0}{5L}$

Zadanie 14

Z wierzchołka równi pochyłej o kącie nachylenia α puszczono ciało, które poruszają się bez tarcia. Ciało zderzyło się całkowicie niesprężyście z drugim o takiej samej masie leżącym na równi pochyłej na początku obszaru, gdzie występuje tarcie. Oba ciała zatrzymały się po przebyciu takiej samej drogi, jak droga , która przebyło ciało pierwsze do chwili zderzenia. Wyznacz współczynnik tarcia.

Rozwiązanie:



Wykorzystują zasadę zachowania energii wyznaczam prędkość z jaką ciało pierwsze uderza w drugie:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

$$h = L\sin\alpha$$

Natomiast z zasady zachowania pędu wyznaczamy prędkość z jaką zaczną poruszać się oba ciała po zderzenia:

$$mv = 2mv_x$$

$$v_x = \frac{1}{2}\sqrt{2gL\sin\alpha}$$

Ponieważ praca wykonana na drodze L przez wypadkową siłę działającą na oba ciała jest równa zmianie energii kinetycznej otrzymujemy:

$$W = \Delta E_k$$

$$(2mg\sin\alpha - 2mg\mu\cos\alpha)L\cos 0° = -\frac{2mv_x^2}{2}$$

$$(2mg\sin\alpha - 2mg\mu\cos\alpha)L = -\frac{2m\frac{1}{4}(2gL\sin\alpha)}{2}$$

$$\sin\alpha - \mu\cos\alpha = -\frac{1}{4}\sin\alpha$$

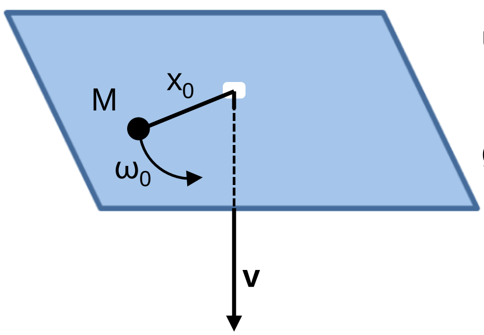
I stąd wyznaczamy szukany współczynnik tarcia: $\mu = \frac{5}{4}tg\,\alpha$

Zadanie 15

Kulka o masie M, przywiązana do nieważkiej i nierozciągliwej nici porusza się po gładkiej, poziomej płaszczyźnie. Drugi koniec nici wciągany jest ze stałą prędkością **v** do otworu, wykonanego w płaszczyźnie. Wyznaczyć ruch kulki i wartość siły naciągu nici F_N, jeżeli wiadomo, że w chwili początkowej nić jest wyprostowana, odległość między kulką i otworem wynosi x_0, a prędkość kątowa ω_0.

Rozwiązanie: Na początku opiszmy jak zmienia się położenie kuli w czasie:

$$x(t) = x_0 - vt$$



Na kulkę działa siła dośrodkowa, której moment siły równy jest zero, więc w opisanym układzie spełniona jest zasada zachowania momentu pędu:

$$x_0 M v_0 = xMv$$

gdzie: v=xω

$$x_0^2 M \omega_0 = (x_0 - vt)^2 M\omega$$

$$\omega(t) = \frac{x_0^2 \omega_0}{(x_0 - vt)^2}$$

Mając zależność ω(t) zgodnie z definicją: $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ wyznaczamy zależność φ(t):

$$\varphi = \int_0^t \omega dt = \int_0^t \frac{x_0^2 \omega_0}{(x_0 - vt)^2} dt = \frac{x_0^2 \omega_0}{v}\left(\frac{1}{x_0 - vt} - \frac{1}{x_0}\right)$$

Siła naciągu co do wartości jest równa sile dośrodkowej czyli:

$$F_N = M\omega^2 r = M\left(\frac{x_0^2 \omega_0}{(x_0 - vt)^2}\right)^2 (x_0 - vt) = \frac{M x_0^4 \omega_0^2}{(x_0 - vt)^3}$$

Zadanie 16
Znaleźć zależność od prędkości siły oporu działającej na ciało o masie m, które poruszając się wzdłuż osi x przebywa odcinek (0,x) w czasie t=ax^2+bx+c (a, b, c- stałe) .

Rozwiązanie:
Wyznaczmy prędkość ciała:

$$t = ax^2 + bx + c$$

$$dt = 2axdx + bdx$$

$$\frac{dt}{dx} = 2ax + b$$

Czyli prędkość równa się:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2ax + b}$$

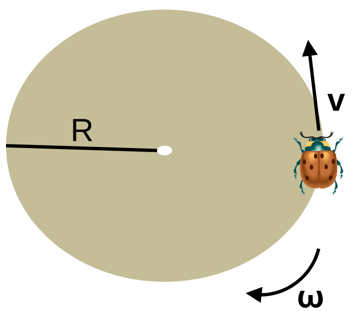
A przyśpieszenie:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}\left(\frac{dt}{dx}\right)^{-1} = \left(\frac{-2a}{(2ax+b)^2}\right)\left(\frac{1}{2ax+b}\right) = \frac{-2a}{(2ax+b)^3} = -2av^3$$

Ponieważ F=ma, więc zależność F(v) będzie miała postać:

$$F = -2mav^3$$

Zadanie 17
Na brzegu poziomej, okrągłej tarczy o masie M i promieniu R stoi żuczek o masie m. Tarcza może obracać się bez tarcia wokół pionowej osi. Jaka będzie prędkość kątowa tarczy ω, jeżeli żuczek zacznie chodzić wzdłuż jej brzegu ze stałą względem niej prędkością v. Jaką drogę przebędzie żuczek względem tarczy w czasie jej jednego pełnego obrotu?
Rozwiązanie: Korzystając z zasady zachowania momentu pędu układu żuczek-tarcza, wiemy, że moment pędu początkowy równa się momentowi pędu końcowego. Początkowy moment pędu równa się zero (prędkość tarczy i żuczka równa się zero). Końcowy moment pędu będzie równy sumie momentu pędu tarczy (L_t) i żuczka ($L_ż$):



$$\vec{L}_k = \vec{L}_ż + \vec{L}_t$$

Gdy żuczek zacznie chodzić wzdłuż brzegu platformy, platforma zacznie poruszać się w stronę przeciwną dlatego zapis skalarny będzie wyglądał następująco:

$$L_k = L_ż - L_t$$

Moment pędu tarczy i żuczka należy opisać względem tego samego układu odniesienia. Przyjmując układ odniesienia związany z Ziemią, zarówno prędkość żuczka, jak i tarczy należy opisać względem tego układu:

$$L_k = mR(v - \omega R) - I\omega$$

gdzie moment bezwładności tarczy wynosi: $I = \frac{1}{2}MR^2$, (v- ωR) to prędkość kątowa żuczka, a ω to prędkość kątowa tarczy obie prędkości podane względem układu odniesienia związanego z Ziemią.

Wykorzystując zasadę zachowania momentu pędu otrzymujemy prędkość kątowa tarczy:

$$L_0 = 0 = L_k \Rightarrow \omega = \frac{mv}{R\left(m + \frac{1}{2}M\right)}$$

Drogę jaką przebył żuczek w czasie jednego pełnego obrotu wyznaczamy w następujący sposób:

$$s = vT = v\frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow s = 2\pi R\left(\frac{1}{2}\frac{M}{m} + 1\right)$$

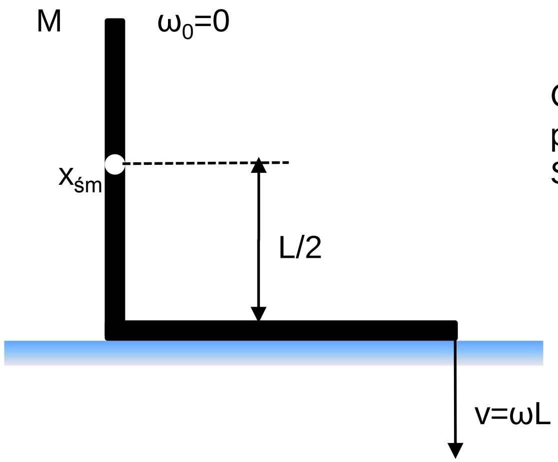
Zadanie 18

Cienki, jednorodny, pionowo ustawiony słup o wysokości L znajdujący się na poziomej płaszczyźnie, po podpiłowaniu u podstawy pada na tę płaszczyznę. Obliczyć prędkość górnego końca słupa w momencie uderzenia o płaszczyznę zakładając, że dolny jego koniec pozostaje nieruchomy. Przyśpieszenie ziemskie wynosi g, a moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek pręta równa się 1/12 ML^2.

Rozwiązanie:

Ruch słupa można rozpatrywać jako obrotowy wokół osi poziomej przechodzącej przez jego dolny koniec. Zgodnie z zasadą zachowania energii, energia kinetyczna słupa w chwili padania na podłoże jest równa stracie energii potencjalnej słupa, gdyż środek masy obniżył się o 0.5L. Otrzymujemy więc zależność:

$$Mg\frac{1}{2}L = \frac{I\omega^2}{2} \tag{1}$$



Gdzie M jest masa słupa, a I momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez koniec słupa . Moment bezwładności wyznaczamy korzystając z twierdzenia Steinera:

$$I_k = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2 \tag{2}$$

Zależność pomiędzy prędkością liniowa i kątową podana jest zależnością: ω =v/L

Podstawiając (2) i (3) do (1) otrzymujemy:

$$MgL = \frac{ML^2\left(\frac{v}{L}\right)^2}{3} \tag{3}$$

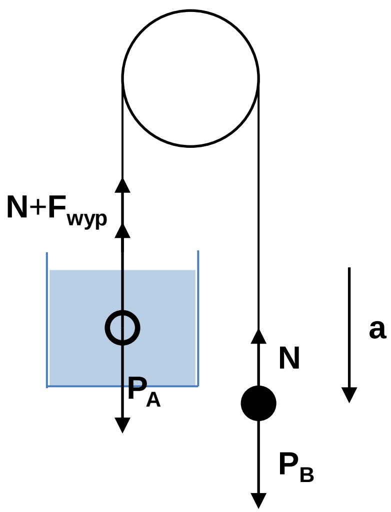
I stąd będziemy mieli prędkość górnego końca słupa w momencie uderzenia o płaszczyznę:

$$v = \sqrt{3gL}$$

Zadanie 19

Na końcach nieważkiej i nierozciągliwej nici, która może ślizgać się bez tarcia po nieruchomym bloczku, zawieszono ciężarki A i B wykonane z tego samego materiału. Masa ciężarka B jest dwukrotnie większa od masy ciężarka A. Gdy ciężarek A umieszczono w cieczy o gęstości ρ i puszczono swobodnie , ciężarki zaczęły poruszać się ruchem jednostajnie przyśpieszonym z przyśpieszeniem a. Obliczyć gęstość materiału, z którego wykonano ciężarki. Przyspieszenie ziemskie wynosi g, lepkość cieczy pominąć.

Rozwiązanie: Ciała poruszają się ruchem przyspieszonym, na każde z nich działa niezrównoważona siła, która jest wprost proporcjonalna do iloczynu masy i przyspieszenia. Napiszmy dla każdej masy 2-gą zasadę dynamiki, najpierw w postaci wektorowej, a potem skalarnej. Dla ciężarka A:



$$m\vec{a} = \vec{N} + \vec{F}_{wyp} + m\vec{g}$$

$$ma = N + F_{wyp} - mg$$

Dla ciężarka B:

$$2m\vec{a} = 2m\vec{g} + \vec{N}$$

$$2ma = 2mg - N$$

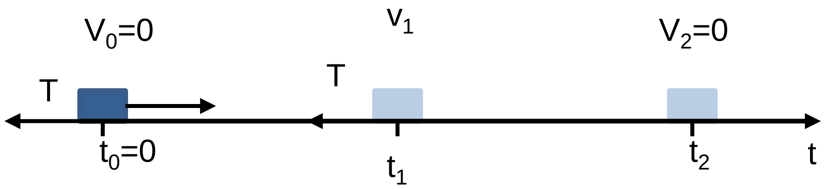
Wykorzystując zależność m=ρV, oraz prawo Archimedesa, które mówi, że siła wyporu równa się ciężarowi cieczy wypartej przez to ciało otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} \rho_x Va = N + \rho Vg - \rho_x Vg \\ 2\rho_x Va = 2\rho_x Vg - N \end{cases}$$

Rozwiązując go uzyskujemy poszukiwaną gęstość materiału :

$$\rho_x = \frac{\rho g}{3a - g}$$

Zadanie 20
Na ciało o masie m, znajdujące się na poziomej płaszczyźnie działa przez t_1 sekund pozioma siła Q=const. Znaleźć drogę przebytą przez ciało do chwili jego zatrzymania się, jeżeli współczynnik tarcia o płaszczyznę jest równy μ.
Rozwiązanie:



Napiszemy 2-gą zasadę dynamiki dla ciała w pierwszym etapie ruchu tj. dla czasu z przedziału (t_0 - t_1):

$$ma = Q - T$$

$$m\frac{dv}{dt} = Q - \mu mg$$

Uwzględniając warunki początkowe (w czasie t_0 =0 ciało spoczywała, czyli również v_0 =0) rozwiązujemy następujące równanie, aby otrzymać v(t):

$$\int_0^v dv = \int_0^t \left(\frac{Q}{m} - \mu g\right) dt$$

$$v = \frac{Q}{m}t - \mu gt \qquad (1)$$

Wykorzystując definicje prędkości wyznaczamy drogę w pierwszym okresie trwania ruchu:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Podstawiając równanie (1) i położenie w chwili t_0 równe zero otrzymujemy równanie:

$$\int_0^{x_1} dx = \int_0^{t_1} \left(\frac{Q}{m}t - \mu gt\right) dt$$

Rozwiązując je będziemy mieli drogę jaką przebyło ciało w przedziale czasu (t_0 - t_1):

$$x_1 = \frac{Q}{2m}t_1^2 - \frac{\mu g}{2}t_1^2 \qquad (2)$$

2-ga zasada dynamiki dla drugiego etapu ruchu w przedziale ($t_1 - t_2$), gdzie t_2 jest czasem po którym ciało się zatrzyma. W tym etapie ruchu na ciało działa tylko siła tarcia, więc otrzymujemy równanie:

$$ma_2 = -T$$

$$m\frac{dv}{dt} = -\mu mg$$

Rozdzielając zmienne i wstawiając warunki początkowe dla tego etapu ruchu dostajemy równanie różniczkowe:

$$\int_{v_1}^{v} dv = \int_{t_1}^{t} -\mu g dt \qquad (3)$$

Ten etap ruchu rozpoczyna się w czasie t_1 i wówczas prędkość wynosi v_1 i ciało znajduje się w położeniu x_1 (równanie 2). Prędkość v_1 otrzymujemy wstawiając do zależności v(t) (równanie 1) dla pierwszego etapu ruchu czas t_1:

$$v_1 = \frac{Q}{m}t_1 - \mu g t_1 \qquad (4)$$

Uwzględniając warunki początkowe dane równaniami (2) i (4) uzyskujemy zależność v(t) dla drugiego etapu ruchu:

$$v = \frac{Q}{m}t_1 - \mu g t \qquad (5)$$

I wyznaczamy całkowitą drogę, która przebyło ciało korzystając z równania:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{Q}{m}t_1 - \mu g t\right) dt \qquad (6)$$

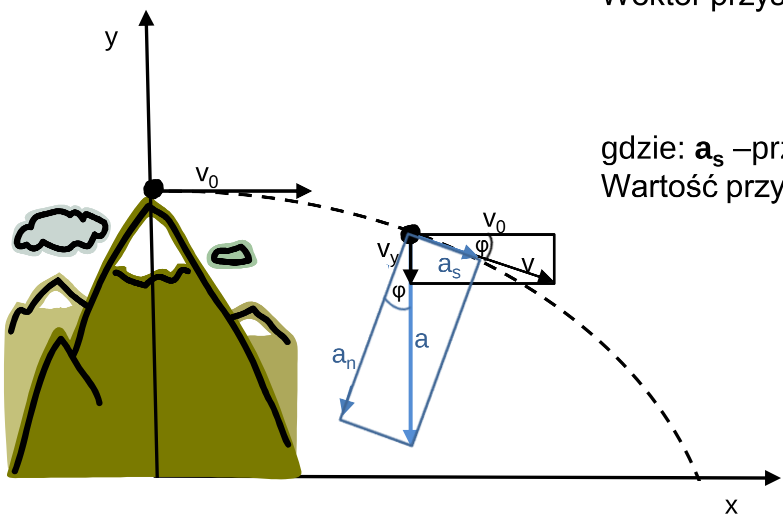
Czas po którym ciało się zatrzyma (t_2) otrzymamy wykorzystując zależność (5). Dla tego czasu przyjmie ona wartość zero:

$$v = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{Q}{m\mu g}t_1 \qquad (7)$$

Rozwiązując równie (6) i wstawiając graniczne wartości opisane równaniami: (2) i (7) otrzymujemy rozwiązanie, czyli drogę przebytą przez ciało do chwili jego zatrzymania się:

$$x_2 = \frac{Q}{2m}\left(\frac{Q}{mg\mu} - 1\right)t_1^2$$

Zadanie 21
Z wierzchołka góry wyrzucono ciało z prędkością v_0. Znaleźć zależność składowych wektora przyśpieszenia styczna i normalną do toru w funkcji czasu.
Rozwiązanie:



Wektor przyspieszenia ciała jest równy sumie dwóch prostopadłych do siebie wektorów:

$$\vec{a} = \vec{a_s} + \vec{a_n}$$

gdzie: $\mathbf{a_s}$ –przyspieszenie styczne, $\mathbf{a_n}$ – przyśpieszenie normalne do toru.
Wartość przyśpieszenia wyznaczamy korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$a = \sqrt{a_s^2 + a_n^2} \qquad (1)$$

W rozpatrywanym zadaniu w dowolnej chwili czasu przyśpieszenie ma stałą wartość równa przyspieszeniu ziemskiemu. Natomiast w trakcie ruchu ciała zmienia się rozkład tego przyspieszenia na składowa styczną i normalną do toru.

Składową styczną znajdziemy korzystając z zależności trygonometrycznej:

$$\sin\varphi = \frac{a_s}{a} = \frac{a_s}{g} \Rightarrow a_s = g\sin\varphi \qquad (2)$$

Funkcję trygonometryczna wyznaczamy wykorzystując zależność:

$$\sin\varphi = \frac{v_y}{v} = \frac{gt}{\sqrt{v_o^2 + g^2t^2}} \qquad (3)$$

Wstawiając (3) do (2) otrzymujemy:

$$a_s = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_o^2 + g^2t^2}}$$

Składowa normalna do toru otrzymamy korzystając z zależności (1):

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_s^2} \Rightarrow a_n = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}$$

Zadanie 22

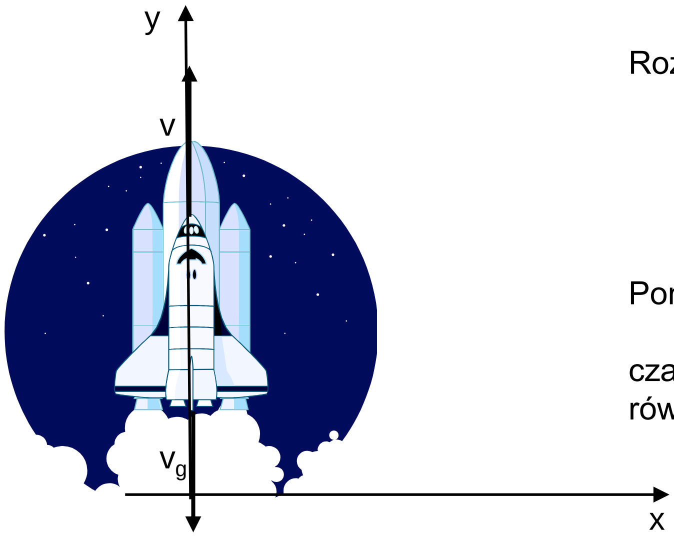
Rakieta wznosi się pionowo z powierzchni Ziemi w ziemskim polu grawitacyjnym ze stałą prędkością v_0. Względna prędkość wypływu gazu równa się v_g=const. Znaleźć zależność zmiany masy od czasu jeżeli w chwili t=0 masa rakiety wynosiła m_0 i rakieta znajdowała się na powierzchni Ziemi (y=0). Promień Ziemi i przyspieszenie ziemskie traktujemy jako dane.

Rozwiązanie: Ruch ciała o zmiennej masie opisujemy równaniem:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}(\vec{v} + \vec{u}) \qquad (1)$$

Gdzie: **F** jest działającą siła zewnętrzna, w tym przypadku będzie to siła grawitacji, a (**v**+**u**) jest prędkością traconej masy - dm względem układu, w którym opisujemy ruch ciała. W naszym przypadku równanie (1) przyjmie postać:

$$\frac{dp}{dt} = -F + \frac{dm}{dt}(v - v_g)$$



Rozpisując powyższe równie otrzymujemy:

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = -F + v\frac{dm}{dt} - v_g\frac{dm}{dt} \qquad (2)$$

Ponieważ rakieta porusza się ze stałą prędkością, więc zmiana prędkości w czasie równa się zero ($\frac{dv}{dt} = 0$). Upraszczając czynniki w równaniu (2) otrzymamy równanie:

$$F = -v_g\frac{dm}{dt} \qquad (3)$$

Korzystając z prawa powszechnego ciążenia otrzymujemy wyrażenie na siłę: $$F = G\frac{Mm}{(R_z + y)^2}$$

Musimy w równaniu (2) uwzględnić dane z zadania tak więc ponieważ rakieta porusza się ze stałą prędkością , więc zależność y(t) przyjmuje postać: $y=v_0t$, natomiast na powierzchni Ziemi: $mg = G\frac{mM}{R^2}$,więc $GM = gR^2$ i dostajemy równanie:

$$\frac{gR_z^2 m}{\left(R_z + v_0 t\right)^2} = -v_g \frac{dm}{dt}$$

Rozdzielając zmienne otrzymujemy równanie różniczkowe w postaci:

$$\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = \int_0^t -\frac{gR_z^2}{v_g\left(R_z + v_0 t\right)^2} dt$$

I jego rozwiązanie:

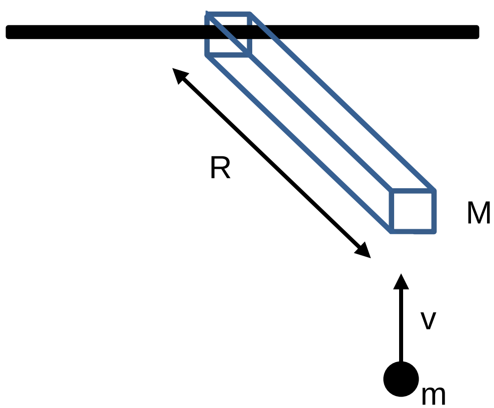
$$\ln\frac{m}{m_o} = -\frac{gR_z^2}{v_g v_0}\left(-\frac{1}{R_z + v_0 t} + \frac{1}{R_z}\right)$$

I stąd szukaną zależność masy w funkcji czasu:

$$m = m_0 \exp\left(-\frac{gR_z t}{v_g\left(R_z + v_0 t\right)}\right)$$

Zadanie 23
Jednorodny pręt o masie M i długości R jest osadzony na poziomej osi i podparty tak, że zajmuje pozycję poziomą. Pocisk o masie m lecący z dołu z prędkością v trafia w koniec pręta i pozostaje w nim. O jaki kat obróci się wokół poziomej osi po zderzeniu z pociskiem, jeżeli leciał on po torze prostopadłym do płaszczyzny w której leży pręt i os pręta?

Rozwiązanie: W opisanym zderzeniu (w chwili zderzenia) spełniona jest jedynie zasada zachowania momentu pędu. Ponieważ wypadkowy moment pędu układu wynosi zero ($\vec{r}$ =0) możemy tę zasadę. zapisać w postaci:



$$Rmv = I\omega \tag{1}$$

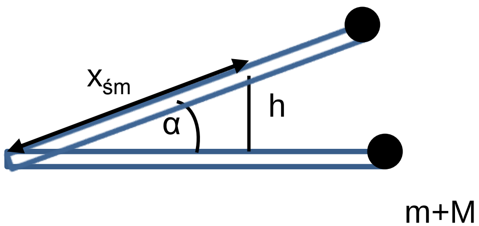
Gdzie I jest momentem bezwładności układu pręt + pocisk. Moment bezwładności wyznaczamy z twierdzenia Steinera:

$$I = \frac{1}{12}MR^2 + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 + mR^2 = \frac{1}{3}MR^2 + mR^2 \tag{2}$$

Wstawiając (2) do (1) otrzymujemy prędkość kątową z jaką będzie poruszać się układ ciał:

$$\omega = \frac{3mv}{(M+3m)R} \tag{3}$$

Następnie wykorzystujemy zasadę zachowania energii. Energia kinetyczna ruchu obrotowego, która posiada układ na początku ruchu zmienia się na energię potencjalną, którą uzyskuje ciało w chwili odchylenia się o maksymalny kąt:

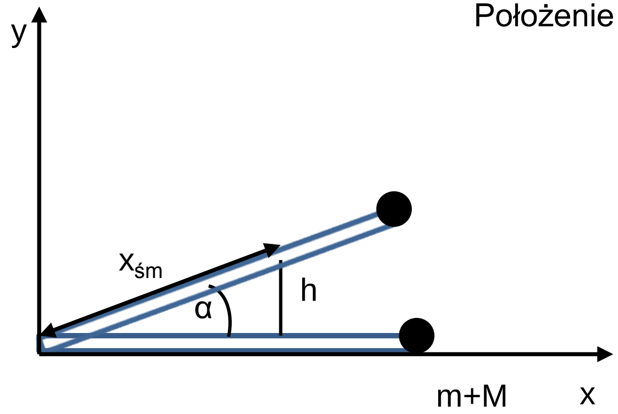


$$\frac{I\omega^2}{2} = (m+M)gh \tag{4}$$

Wysokość h, na która wznosi się środek masy wyznaczamy z zależności trygonometrycznej:

$$\frac{h}{x_{śm}} = \sin\alpha \tag{5}$$

Położenie środka masy wyznaczamy z definicji:



$$x_{śm} = \frac{M\frac{R}{2} + mR}{m+M}$$

$$x_{śm} = \frac{MR + 2mR}{2(m+M)} \qquad (6)$$

Uwzględniając (6) w równaniu (5) otrzymujemy:

$$h = \left(\frac{MR + 2mR}{2(m+M)}\right)\sin\alpha \qquad (7)$$

Wstawiając (2), (3) i (7) do równania opisującego zasadę zachowania energii (równanie 4) uzyskujemy:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}MR^2 + mR^2\right)\left(\frac{3mv}{(M+3m)R}\right)^2 = (m+M)g\left(\frac{MR+2mR}{2(m+M)}\right)\sin\alpha$$

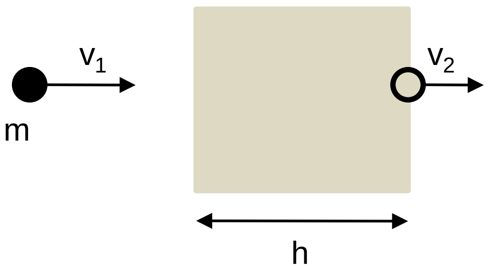
Przekształcając równanie otrzymujemy funkcję trygonometryczną poszukiwanego kąta:

$$\sin\alpha = \frac{3m^2v^2}{(M+3m)(M+2m)gR}$$

Zadanie 24

Pocisk o masie m przebija przeszkodę o grubości h. W chwili uderzenia o przeszkodę miał prędkość v_1. Jaka będzie prędkość v_2 pocisku po przebiciu przeszkody, jeżeli stawia ona opór: **R**=a+b**v**^{2} (a, b - stałe)? Obliczyć minimalną grubość przeszkody dla której pocisk nie przebije przeszkody. Wpływ siły ciężkości na ruch pocisku w przeszkodzie zaniedbać.

Rozwiązanie



Na ciało poruszające się w obszarze przeszkody działa jedynie siła oporu, więc 2-ga zasada dynamiki będzie miała postać:

$$m\vec{a} = \vec{R}$$

Uwzględniając definicję przyspieszenia otrzymujemy równanie:

$$m\frac{dv}{dt} = -a - bv^2$$

Ponieważ potrzebujemy zależności prędkości w funkcji drogi, najszybciej możemy ją uzyskać wykonując zamianę zmiennych w następujący sposób:

$$m\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx} = -a - bv^2$$

$$mv\frac{dv}{dx} = -a - bv^2 \qquad (1)$$

Aby rozwiązać równanie (1) należy wykonać następujące podstawienie:

$$w = -a - bv^2$$

$$dw = -2bv\,dv$$

$$dv = -\frac{dw}{2bv}$$

Wprowadzając podstawienie do równania (1) uzyskujemy:

$$mv\left(-\frac{dw}{2bv}\right) = w\,dx \qquad (2)$$

Aby rozwiązać równanie należy rozdzielić zmienne i wykorzystać warunki brzegowe. Ponieważ prędkość początkowa równa się v_1, więc odpowiadająca jej zmienna w ma postać $-a-b\,v_1^2$ i odpowiednio dla v_2, $-a-b\,v_2^2$, natomiast początkowa wartość położenia to 0, a końcowa h, gdyż szukamy prędkości po przebiciu przeszkody:

$$\int_{-a-bv_1^2}^{-a-bv_2^2} \frac{dw}{w} = \int_0^h -\frac{2b}{m}\,dx \qquad (3)$$

Rozwiązując równanie (3) otrzymujemy:

$$\ln \frac{a+bv_2^2}{a+bv_1^2} = -\frac{2b}{m}h$$

I wyznaczając z tego równania v_2 uzyskujemy pierwszą część rozwiązania:

$$v_2 = \sqrt{\frac{\left(a+bv_1^2\right)e^{-\frac{2bh}{m}} - a}{b}} \qquad (4)$$

Dla $v_2=0$ otrzymujemy h_{min} dla której pocisk utkwi w przeszkodzie. Wstawiając $v_2=0$ do(4) dostajemy drugą część rozwiązania h_{min}:

$$h_{\min} = \frac{m}{2b} \ln \frac{a+bv_1^2}{a}$$

Zadanie 25

Prędkość wody w rzece zmienia się z kwadratem odległości od brzegu, przy czym na środku rzeki jest maksymalna i wynosi 6m/s a na brzegach równa zeru. Szerokość rzeki wynosi 15m. Wioślarz płynie prostopadle do brzegu rzeki ze stała prędkością 3m/s. Na jaką odległość zniesie wioślarza w dół rzeki jej nurt, gdy osiągnie przeciwległy brzeg?

Rozwiązanie

$$D = 15m \qquad v_{\max} = 6\frac{m}{s} \qquad v_0 = 6\frac{m}{s}$$

Zakładając, że prędkość rzeki można opisać równaniem kwadratowym:

$$v_{rz}(y) = Ay^2 + By + C$$

Wyznaczamy stałe A, B, C wykorzystując warunki zadania:

$$\left.\begin{aligned} & v_{rz}(0) = C = 0 \\ & v_{rz}\left(\frac{D}{2}\right) = A\frac{D^2}{4} + B\frac{D}{2} + C = v_{\max} \\ & v_{rz}(D) = AD^2 + BD + C = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} & A = -\frac{4v_{\max}}{D^2} \\ & B = \frac{4v_{\max}}{D} \\ & C = 0 \end{aligned}\right\}$$

Wioślarz porusza się ruchem jednostajnym, zatem:

$$y = v_0 t$$

$$wtedy$$

$$v_{rz}(t) = -\frac{4v_{\max}v_0^2t^2}{D^2} + \frac{4v_{\max}v_0 t}{D}$$

Wioślarz dotrze na drugi brzeg po czasie:

$$T = \frac{D}{v_0}$$

Odległość jaką przebędzie w dół rzeki wynosi:

$$x = \int_0^T v_{rz}(t)dt = \int_0^T \left(-\frac{4v_{\max}v_0^2t^2}{D^2} + \frac{4v_{\max}v_0 t}{D}\right)dt = -\frac{4v_{\max}v_0^2T^3}{3D^2} + \frac{2v_{\max}v_0T^2}{D} =$$

$$-\frac{4v_{\max}D}{3v_0} + 2\frac{v_{\max}D}{v_0} = \frac{2v_{\max}D}{3v_0} = 60m$$

Zadanie 26

Łucznik chce trafić w spadające z drzewa jabłko, znajdujące się w odległości 20m od niego na wysokości 4 metrów. Obliczyć pod jakim kątem względem poziomu powinien ustawić łuk, aby wypuścił strzałę w stronę jabłka, gdy oderwało się ono od gałęzi. Założyć brak oporów ruchu.

Rozwiązanie

$$d = 20m \qquad v = 45\frac{m}{s} \qquad h = 4m$$

Rozpisujemy równania ruchu dla strzały względem miejsca, w którym znajduje się łucznik, składowe prędkości strzały w momencie wystrzału to v_x oraz v_y

$$\begin{cases} x(t) = v_x t \\ y(t) = v_y t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Oraz dla jabłka:

$$\begin{cases} x(t) = d \\ y(t) = h - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Strzała trafia w jabłko, zatem:

$$\begin{cases} d = v_x t \\ h - \dfrac{gt^2}{2} = v_y t - \dfrac{gt^2}{2} \Rightarrow h = v_y t \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy czas, jaki upłynął od momentu wystrzału, który podstawiamy do drugiego równania:

$$h = v_y \frac{d}{v_x} \Rightarrow \frac{v_y}{v_x} = \frac{h}{d} = tg\alpha = \frac{2}{15}$$

Odpowiada to kątowi wystrzału $11^{\circ} 18'$

Zadanie 27

Piłka została wyrzucona w górę z prędkością v_0. Na jaką wysokość się wzniesie, jeżeli piłka wytraca prędkość w ten sposób, ze jej różnica prędkości w porównaniu do prędkości początkowej jest proporcjonalna do wysokości na jakiej się aktualnie znajduje.

Rozwiązanie

Równanie ruchu można zapisać w postaci (k>0 –stała proporcjonalności) $v - v_0 = -ky$

Podstawiając: $v = \frac{dy}{dt}$

Otrzymujemy równanie z warunkiem początkowym : $y(t=0) = 0$

$$\frac{dy}{dt} - v_0 = -ky$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 - ky$$

$$\frac{dy}{v_0 - ky} = dt$$

$$\int \frac{dy}{v_0 - ky} = \int dt$$

Z po scałkowaniu otrzymujemy: $\frac{-1}{k}\ln(v_0 - ky) + C = t$

Stałą obliczamy z warunku początkowego: $\frac{-1}{k}\ln(v_0) + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{k}\ln(v_0)$

A równanie przybiera postać: $\frac{-1}{k}\ln(v_0 - ky) + \frac{1}{k}\ln(v_0) = t$

Po przekształceniach otrzymamy zależność położenia w pionie od czasu:

$$y(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

Ciało zatrzyma się, gdy prędkość spadnie do zera:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = v_0 e^{-kt} = 0 \Leftrightarrow t \to \infty$$

Wysokość na jaką się wzniesie otrzymujemy dla : $t \to \infty$

$$y(t \to \infty) = \frac{v_0}{k}$$

Zadanie 28

Rozważamy następującą sytuację: dwa ciała A, B startują w tym samym miejscu, w tej samej chwili czasu. Ciało A porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem **a**[a*1m/s^2], natomiast ciało B porusza się ruchem niejednostajnym z przyspieszeniem rosnącym liniowo w funkcji czasu ze stałą proporcjonalności a[a*1m/s^3]. W jakiej odległości od miejsca startu się spotkają?

Rozwiązanie

Droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej: $s_A = \frac{a_A t^2}{2}$

Droga w ruchu niejednostajnie przyspieszonym wymaga obliczenia na podstawie przyspieszenia:

$$a_B = at$$
$$\frac{dv_B}{dt} = at \Rightarrow dv_B = atdt \Rightarrow \int dv_B = \int atdt$$

Warunek początkowy: $v_B(t=0)=0$

Wtedy:

$$v_B = \frac{1}{2}at^2$$

Drogę obliczymy rozpisując prędkość: $v_B = \frac{ds_B}{dt} = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow ds_B = \frac{1}{2}at^2dt \qquad s_B(t=0)=0$

$$\int ds_B = \int \frac{1}{2}at^2dt$$
$$s_B = \frac{1}{6}at^3$$

Szukamy miejsca spotkania: $s_B = s_A$

$$\frac{a_A t^2}{2} = \frac{a t^3}{6}$$

Oraz uwzględniamy jednostki przypisane wielkościom a:

$$\frac{at^2}{2}\left[\frac{m}{s^2}\right] = \frac{at^3}{6}\left[\frac{m}{s^3}\right]$$

$$t = 3[s]$$

Znając czas, wyznaczamy miejsce spotkania

$$s_A = s_B = \frac{a3^2}{2} = 4{,}5a\left[\frac{m}{s^2}s^2 = m\right]$$

Zadanie 29

Balon wznosi się do góry ze stałą prędkością 2m/s. Wiatr nadaje mu poziomą składową prędkości v=ky, gdzie y to wysokość na jakiej się aktualnie znajduje. Czy bezpiecznie opuści dolinę o szerokości 100m i głębokości 40m startując z jednego jej krańca? Wiadomo, że po pierwszych 10 sekundach ruchu balon przemieścił się w poziomie o 20m.

Rozwiązanie:

$$d = 100m \quad v_y = 2\frac{m}{s} \qquad h = 40m \qquad v_x(y) = ky$$

Wiedząc, że ruch w pionie odbywa się ze stałą prędkością możemy podstawić do poziomej składowej: $y = v_y t$

Wówczas: $v_x(t) = kv_y t$

$$\frac{dx}{dt} = kv_y t \Rightarrow dx = kv_y tdt$$

$$\int dx = \int kv_y tdt$$

Z warunkiem początkowym: $x(t=0) = 0$

$$\int dx = \int kv_y tdt$$

$$x(t) = \frac{1}{2}kv_y t^2$$

Stałą k obliczymy korzystając z informacji o ruchu w pierwszych 10s: $\frac{2x}{v_y t^2} = k$

$$k = \frac{1}{5}\left[\frac{m}{\frac{m}{s}s^2} = \frac{1}{s}\right]$$

Aby bezpiecznie opuścić dolinę musi wznieść się na wysokość 40m, a w poziomie nie może przebyć więcej niż 100m. Czas wznoszenia na tę wysokość:

$$t = \frac{h}{v_y} = 20[s]$$

Odległość jaką przebędzie w tym czasie w poziomie:

$$x(t) = \frac{1}{2} k v_y t^2$$

$$x(t) = \frac{1}{10} v_y t^2$$

$$x(20) = 80m$$

Co oznacza, że może bezpiecznie opuścić dolinę.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1
Walec i kula staczają się bez poślizgu z równi pochyłej o kącie nachylenia α i wysokości h. Cała są jednorodne, a ich masy i promienie są jednakowe. Które z nich stoczy się wcześniej?

Odpowiedź: kula

Zadanie 2
Mała kulka o masie m=100g zawieszona na nici o długości l=50 cm zatacza okrąg o promieniu R=10cm. Jaki jest czas obiegu kulki po okręgu? Dane jest przyspieszenie ziemskie g =10 m/s^2.

Odpowiedź: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{l^2 - R^2}}{g}} = 1.4s$

Zadanie 3
Pręt o długości l=1m zawieszono pionowo jednym końcem i odchylono od pionu o kąt α=30°, a następnie puszczony. Jaką szybkość miał koniec pręta w chwili przechodzenia przez linie pionu?

Odpowiedź: $v = 6\sqrt{\frac{gl}{2}(1-\cos\alpha)} = 5\frac{m}{s}$

Zdanie 4
Przyspieszenie w dowolnym ruchu prostoliniowym wyraża się wzorem: **a** = (12t^2 +18sin(3t) -2)m/s^2. Wyznacz zależność v(t) i x(t) uwzględniając następujące warunki początkowe: v_0=10m/s, x_0=5m.

Odpowiedź:

$$v = 4t^3 - 9\cos(3t) - 2t + 10$$

$$x = t^4 + 3\sin(3t) - t^2 + 10t + 5$$

Zadanie 5
Silnik motorówki poruszającej się z prędkością v w pewnym momencie przestaje pracować w wyniku czego jego prędkość maleje w ten sposób, że różnica prędkości w porównaniu do prędkości v jest proporcjonalna do odległości od miejsca, w którym przerwał prace silnik. Stała proporcjonalności wynosi u. Jaka drogę przebędzie motorówka do momentu zatrzymania?

Odpowiedź: $s = \frac{v}{u}$

Zdanie 6
Na gładkim, poziomym podłożu stoi wózek o masie M, a na nim człowiek o masie m. W pewnej chwili człowiek skacze równolegle do osi wózka z prędkością $\vec{u}$ względem niego. Z jaką prędkością zacznie poruszać się wózek względem Ziemi, jeżeli zaniedba się tarcie?

Odpowiedź:

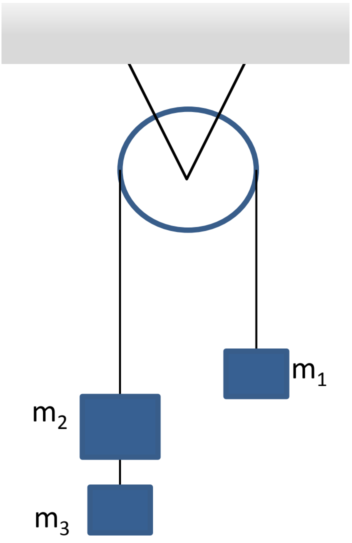
$$v = u\frac{m}{M+m}$$

Zadanie7
Na gładkim stole spoczywa cienki pręt o długości L i masie M. Prostopadle w kierunku pręta porusza się mała kulka o masie m. W wyniku zderzenia doskonale sprężystego z prętem kulka zatrzymała się a pręt rozpoczął ruch. W jakim miejscu licząc od środka pręta musiała uderzyć kulka, aby takie zderzenie było możliwe? Tarcie zaniedbujemy.

Odpowiedź:

$$x = \sqrt{\frac{L^2}{12}\left(\frac{M}{m} - 1\right)}$$

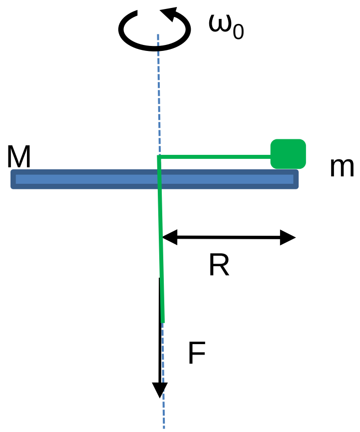
Zadanie 8
Przez nieruchomy bloczek przerzucona jest nieważka i nierozciągliwa linka, na końcach której przymocowane są masy $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 3$ kg i $m_3 = 2$ kg . Obliczyć: a) przyspieszenie a z jakim poruszają się masy, b) siły N napinające linkę. Masę bloczka oraz tarcie zaniedbujemy. Przyspieszenie ziemskie g = 10 m/s^2.



Odpowiedź: a=2,5 m/s^2, N_1 = 37,5N, N_2 =15N

Zadanie 9

Jednorodna tarcza o masie M i promieniu R obraca się swobodnie wokół nieruchomej osi przechodzącej przez jej środek. Wzdłuż promienia tarczy zamocowana jest prowadnica, po której może poruszać się bez tarcia niewielka masa m. Do masy m przymocowana jest cienka nić, której drugi koniec przewleczony jest w dół przez otwór w środku tarczy. W chwili początkowej masa znajdowała się na skraju tarczy poruszającej się z prędkością kątową ω_o . Następnie do dolnego końca nici przyłożono siłę F, która spowodowała wolne przyciągnięcie nici do środka tarczy. Obliczyć prędkość kątową układu w funkcji odległości r masy od środka tarczy. Jaką pracę wykonała siła F na przyciągnięcie masy do środka tarczy?



Odpowiedź:

$$\omega = \frac{R^2\omega_0\left(\frac{1}{2}M+m\right)}{\frac{1}{2}MR^2+mr^2} \qquad W=\left(\frac{1}{2}M+m\right)\frac{m}{M}R^2\omega_0^2$$

Zadanie 10

Wyznaczyć zależność v(t) i x(t) dla wózka na który zsypywany jest piasek ze zsypu ze stałą prędkością **b**. Masa początkowa wózka wynosiła m_0 , prędkość v_0 , a położenie x_0.

Odpowiedź:

$$v = v_0\frac{m_0}{m_0+bt} \qquad x = x_0+\frac{m_0v_0}{b}\ln\frac{m_0+bt}{m_0}$$

Zadanie 11

Punkt materialny o masie m porusza się po prostej poziomej. Na punkt działa siła oporu: $\vec{R}=k\sqrt{v}$, gdzie k jest dodatnią stałą. Znaleźć drogę przebytą przez punkt do chwili zatrzymania się oraz czas ruchu. Dane są warunki początkowe: x(t=0)=0, v(t=0)=v_0.

Odpowiedź:

$$x=\frac{2m}{3k}v_0^{3/2} \qquad t=\frac{2m}{k}\sqrt{v_0}$$

Zadanie 12

W jakiej odległości od krawędzi stołu o wysokości H spadnie klocek o masie M, w który wbił się pocisk o masie m lecący z prędkością v równolegle do powierzchni stołu? Z jaka wypadkową prędkością klocek uderzy w podłoże?

Odpowiedź:

$$x=\left(\frac{mv}{m+M}\right)\sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad v_k=\sqrt{\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2+2gH}$$

Zadanie 13

Jednorodny krążek o masie M =2kg i promieniu R = 20 cm obraca się ze stałą prędkością kątową ω_1=80 1/s wokół prostopadłej do płaszczyzny krążka poziomej osi przechodzącej przez jego środek. W pewnym momencie od brzegu krążka odłamuje się mały kawałek o masie m=10 g odlatując pionowo do góry od miejsca, w którym się odłamał. Jaka będzie prędkość kątowa uszkodzonego krążka? Jak wysoko wzniesie się odłamany kawałek krążka?

Odpowiedź:

$$\omega=\omega_1=80\frac{1}{s}$$

$$h=\frac{R^2\omega_1^2}{2g}=12{,}8m$$

Zadanie 14

Na krążek o promieniu R = 10 cm i masie M= 5 kg nawinięta jest nierozciągliwa linka, której jeden z końców umocowany jest u sufitu. Obliczyć przyspieszenie kątowe i przyspieszenie liniowe środka ciężkości krążka oraz naciąg linki, jeżeli w pewnej chwili krążek zaczął spadać swobodnie. Przyspieszenie ziemskie g=10m/s^2.

Odpowiedź:

$$\varepsilon=\frac{2g}{3R}=66.66\frac{1}{s^2}$$

$$a=\frac{2}{3}g=6.66\frac{m}{s^2}$$

$$T=\frac{1}{3}Mg=16{,}6N$$

Zadanie 15

Na równie pochyłą o kącie nachylenia α=30° wtacza się bez poślizgu jednorodna kula. Środek kuli miał u podstawy równi prędkość liniową v= 10 m/s. Jak daleko wtoczy się kula na równię? Po jakim czasie powróci ona do podstawy równi? Przyjąć g = 10m/s^2.

Odpowiedź:

$$s = \frac{7v^2}{10g\sin\alpha} = 14m$$

$$t = \frac{14v}{5g\sin\alpha} = 5{,}6s$$

Zadanie 16

W pewniej chwili na tarczy wirującej swobodnie ze stałą prędkością kątową usiadła biedronka, tuż przy jej osi obrotu. Po pewnym czasie zauważono, że biedronka powędrował na brzeg tarczy i tam się zatrzymała. Obliczyć zmianę prędkości kątowej tarczy, jeżeli promień tarczy wynosi R, jej masa M, a masa biedronki m.

Odpowiedź:

$$\Delta\omega = -\omega\frac{m}{m + \frac{M}{2}}$$

Zadanie 17

Obręcz metalowa o średnicy d= 1 m i masie M= 2 kg toczy się po płaszczyźnie z prędkością ruchu postępowego v=4m/s. Jaką drogę do momentu zatrzymania się przebędzie ta obręcz, jeżeli do jej brzegu przyłożymy styczną, stałą siłę hamującą F= 10N?

Odpowiedź:

$$s = \frac{v^2M}{2F} = 1.6m$$

Zadanie 18
Drewniany pręt o masie m=1 kg i długości l=1m może obracać się wokół osi przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do niego. W jednym z końców tego pręta ugrzęzła kula karabinowa o masie m_1 = 20 g lecąca z prędkością v_1 =200m/s w kierunku prostopadłym do osi obrotu i do pręta. Znaleźć prędkość kątową pręta po zderzeniu. O ile zmniejszy się w wyniku tego zderzenia energia kinetyczna układu?

Odpowiedź:

$$\omega = \frac{v_1}{l}\frac{6m_1}{3m_1+m} = 22{,}64\frac{1}{s}$$

$$\Delta E_{kin} = \frac{m_1 v_1^2}{2}\frac{1}{1+\frac{3m_1}{m}} = 377{,}36 J$$

Zadanie 19
Z równi pochyłej o kacie nachylenia α stacza się bez poślizgu ciało o momencie bezwładności I, masie m i promieniu r. Wyznacz jego przyspieszenie liniowe, kątowe i siłę tarcia.

Odpowiedź:

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{I}{mr^2}} \qquad \varepsilon = \frac{g\sin\alpha}{r\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)} \qquad T = \frac{mg\sin\alpha}{1+\frac{mr^2}{I}}$$

Zadanie 20
Na głębokości H poniżej poziomu wody o gęstości ρ_w znajduje się drewniana kulka o gęstości ρ_k. Na jaką wysokość (h) ponad poziom wody wyskoczy kulka, gdy zostanie ona puszczona. Siły tarcie należy pominąć.

Odpowiedź: $h = H\frac{\rho_w - \rho_k}{\rho_k}$

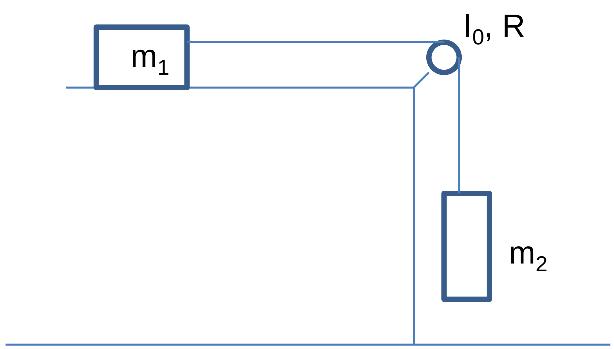
Zadanie 21

Na krześle mogącym obracać się swobodnie wokół osi pionowej siedzi student i trzyma w wyprostowanych rękach odważniki o masie m = 3 kg każdy. Odległość pomiędzy odważnikami wynosi l_1 = 140 cm. Krzesło wiruje wykonując n_1 = 1 obr/sek. Jak zmieni się szybkość wirowania studenta, jeśli zegnie on ręce tak, że odważniki będą w odległości l_2 = 40 cm? Moment bezwładności studenta i krzesła względem osi obrotu wynosi I=4 kgm^2 .

Odpowiedź: $$n_2 = n_1 \frac{I + 2ml_1^2}{I + 2ml_2^2} = 2 \, {}^{obr}\!/\!{}_{sek}$$

Zadanie 22

Wyznaczyć przyspieszenie układu przedstawionego na rysunku uwzględniając siłę tarcia działającą na masę m_1 (współczynnik tarcia wynosi μ). Moment bezwładności bloczka o promieniu R wynosi I_0 .



Odpowiedź:

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{\frac{I_0}{R^2} + m_1 + m_2} g$$

Zadanie 23
O jaki kat należy odchylić jednorodny pręt o długości 1m zawieszony na osi poziomej, przechodzącej przez jego górny koniec, aby dolny koniec pręta przy przechodzeniu przez położenie równowagi osiągnął prędkość 5m/s?
Odpowiedź: $\theta \cong 81°$

Zadanie 24
Ciało o masie 1 kg porusza się prostoliniowo, przy czym zależność drogi w funkcji czasu dana jest równaniem $s=At^3-Bt^2+Ct-D$, gdzie $A=2m/s^3$, $B=1m/s^2$. Jaka jest wartość siły działającej na ciało po upływie pierwszej sekundy ruchu?

Odpowiedź: F=10N

Zadanie 25
Łódź o masie M i długości L jest nieruchoma względem stojącej wody. Na końcu łodzi znajduje się wioślarz o masie m. Obliczyć drogę jaką przebędzie łódź, jeżeli wioślarz przejdzie całą jej długość.

Odpowiedź:
$$s = \frac{mL}{m+M}$$

Zadanie 26
Do wagonika o masie m przyłożono siłę pod katem α. Z jakim przyspieszeniem poruszać się będzie wagonik, jeżeli siła będzie przyłożona tak jak na rysunkach (a) i (b). Współczynnik tarcia wynosi μ?

Odpowiedź:
$$a_1 = \frac{F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - mg\mu}{m}$$
$$a_2 = \frac{F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - mg\mu}{m}$$

Zadanie 27

Kula o masie m została wystrzelona z prędkością v_0 pionowo w dół z wysokości H i wryła się w ziemię na głębokość h. Nie uwzględniając sił tarcia w czasie lotu, obliczyć współczynnik tarcia działającą na kulę, gdy poruszała się ona w ziemi.

Odpowiedź: $$\mu = \frac{m}{2gh}\left[2g(H+h)+v_0^2\right]$$

Zadanie 28

Wyznacz moment bezwładności układu składającego się z dwóch mas m_1 i m_2 odległych o r od siebie względem osi prostopadłej do odcinka łączącego m_1 i m_2 i przechodzącej przez środek masy układu.

Odpowiedź: $$I = \frac{m_1 m_2 r^2}{m_1 + m_2}$$

Zadanie 29

Kulę o masie m rzucono pionowo do góry z prędkością początkową v_1. Po jakim czasie t należy wystrzelić pionowo pocisk o masie m_2 z prędkością v_2, aby wbił się on w kulę w chwili jej maksymalnego wzniesienia? Z jaka prędkością v spadną oba ciała? Opory powietrza pomijamy.

Odpowiedź:

$$t = \frac{(v_1 - v_2) + \sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{g} \qquad v = \frac{\sqrt{m_2^2 v_2^2 + m_1 v_1^2 (m_1 + 2m_2)}}{m_1 + m_2}$$

Zadanie 30

Rakieta ustawiona jest na wysokości H nad powierzchnią Ziemi. Po starcie porusza się pionowo w górę, a jej przyspieszenie zmienia się zgodnie z zależnością $a = kt^2$, gdzie k jest stała wyrażona w odpowiednich jednostkach. Znaleźć zależność prędkości i drogi od czasu

Odpowiedź: $$v = \frac{1}{3}kt^3 \qquad s = H + \frac{1}{12}kt^4$$

Zadanie 31

Prędkość wody w rzece zmienia się z kwadratem odległości od brzegu, przy czym na środku rzeki jest maksymalna i wynosi 4m/s a na brzegach równa zeru. Szerokość rzeki wynosi 15m. Wioślarz płynie prostopadle do brzegu rzeki ze stała prędkością. W jaką prędkością poruszał się wioślarz, gdy woda zniosła go w dół rzeki o 20m?

Odpowiedź: $v = 2m/s$

Zadanie 32

Prędkość wody w rzece zmienia się w następujący sposób:

$$v(y) = \begin{cases} \frac{2v_{\max}}{D} y, dla 0 < y < \frac{D}{2} \\ -\frac{2v_{\max}}{D}(y-D), dla \frac{D}{2} < y < D \end{cases}$$

Gdzie D to szerokość rzeki, v_{max} >0

Obliczyć odległość na jaką zniesie nurt rzeki pływacza, który płynie prostopadle do brzegu rzeki z prędkością v_0

Odpowiedź: $x = \frac{v_{\max} D}{4v_0}$

Zadanie 33

Armata stoi na wzgórzu o kącie nachylenia 10̂. Czy trafi w cel znajdujący się w odległości 140m wzdłuż wzniesienia, jeżeli lufę ma ustawioną pod kątem 30̂ względem poziomu, a prędkość wylotu kuli z lufy 50m/s?

Odpowiedź: Nie trafi, kula upadnie w odległości 152m od armaty wzdłuż wzniesienia.

Zadanie 34

Piłka spada na równię pochyłą, o kącie nachylenia α z wysokości h. W którym miejscu ponownie się od niej odbije?

Odpowiedź: w odległości 8hsinα od miejsca wystrzału

Zadanie 35

Adam upuścił kamień do głębokiej studni. Po czasie 5s usłyszał plusk. Jaką głębokość ma studnia, jeżeli założyć, że prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 330m/s.

Odpowiedź: 18,8m

Zadanie 36

Piłka została wyrzucona w górę z prędkością 10m/s. Czy chwyci ją chłopak stojący na balkonie trzeciego piętra (12m), jeżeli piłka wytraca prędkość w ten sposób, ze jej różnica prędkości w porównaniu do prędkości początkowej jest proporcjonalna do wysokości na jakiej się aktualnie znajduje. Wiadomo, że pierwsze piętro minęła z prędkością 6m/s.

Odpowiedź: wzniesie się na wysokość 10m, chłopak jej nie chwyci.

Zadanie 37

Spadochroniarz wyskakuje z lecącego z prędkością 200km/h samolotu, w jakiej odległości od pozycji wyskoku wyląduje, jeśli zakładać brak oporów ruchu a wysokość z jakiej oddał skok to 1200m

Odpowiedź: wyląduje w odległości około 861m od miejsca wyskoku.

Zadanie 38

Piłka została puszczona z wysokości h. Gdzie uderzy w podłoże jeśli wiadomo, że wiatr znosi piłkę nadając mu poziomą składową prędkości proporcjonalną do wysokości na jakiej się znajduje.

Odpowiedź

$$d = \frac{2}{3} kh \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Zadanie 39

Łucznik trafił w spadające z drzewa jabłko, znajdujące się w odległości 30m od niego. Z jakiej wysokości spadło to jabłko, jeśli łucznik wypuścił strzałę z prędkością 10m/s po sekundzie od oderwania się jabłka z gałęzi i pod kątem 30̂?

Odpowiedź: 9,3m

Zadanie 40

Określić różnicę dróg przebytych przez auto hamujące ruchem jednostajnie opóźnionym (z opóźnieniem a) oraz niejednostajnie opóźnionym z opóźnieniem proporcjonalnym do prędkości (-αv).

Odpowiedź:

$$\Delta s = \frac{v_0^2}{2a} - \frac{v_0}{\alpha}$$