PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Optyka

Zadania z rozwiązaniami

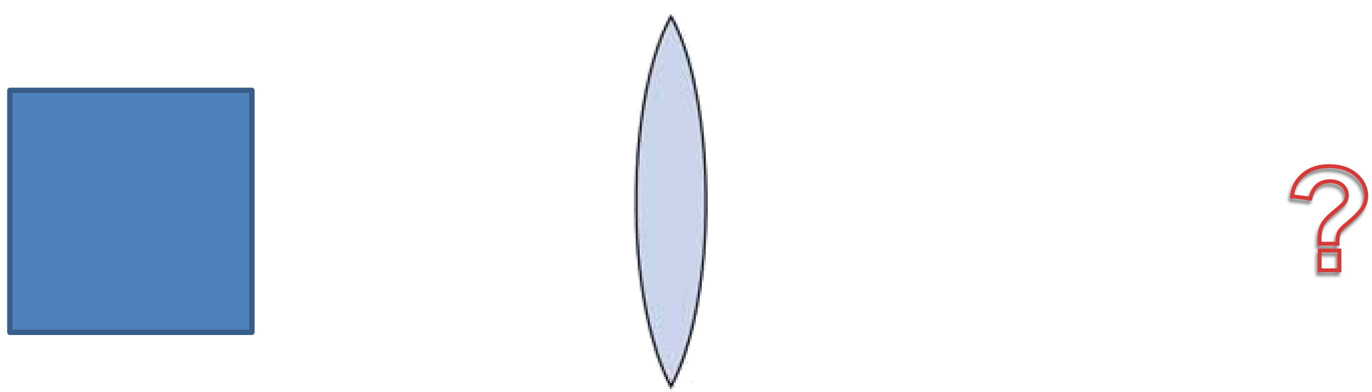
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

Soczewka o dużej głębi ostrości znajduje się w jednej trzeciej odległości między przedmiotem a obrazem. Jaki kształt będzie miał trójwymiarowy obraz sześcianu o boku a? Załóż, że rozmiary sześcianu są dużo mniejsze od ogniskowej soczewki.



Zadanie 1 - rozwiązanie

Ponieważ odległość przedmiotowa jest 2 razy krótsza od obrazowej, a obraz i przedmiot muszą mieć te same rozmiary kątowe i kształt, powiększenie poprzeczne będzie proporcjonalne do stosunku odległości obrazowej i przedmiotowej czyli równe 2. Dzieje się tak dla płaskich przedmiotów i obrazów. Rozważmy więc bliższą i dalszą ścianę sześcianu.

Położenie bliższej ściany i jej obrazu:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{o}=\frac{1}{f}$$

$$p=1{,}5f$$

$$o=3f$$

Położenie dalszej ściany i jej obrazu:

$$\frac{1}{p'}+\frac{1}{o'}=\frac{1}{f}$$

$$p'=1{,}5f+a$$

$$o'=\frac{1{,}5f+a}{0{,}5f+a}f$$

Długość sześcianu i jego obrazu

$$p'-p=a$$

$$o'-o=\frac{-2af}{0{,}5f+a}\xrightarrow{a<<f}-4a$$

Rozmiar poprzeczny obrazu bliższej ściany:

$$\frac{o}{p}a=\frac{3f}{1{,}5f}a=2a$$

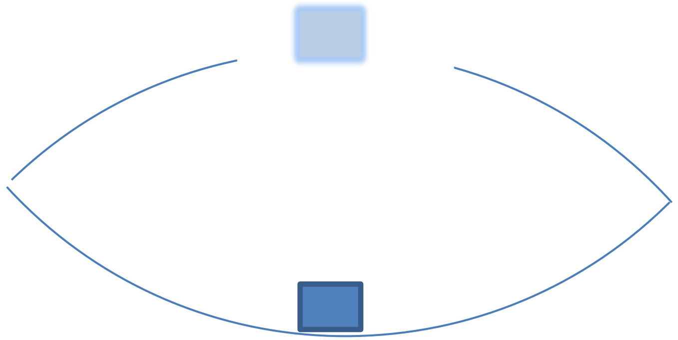
Rozmiar poprzeczny obrazu dalszej ściany:

$$\frac{o'}{p'}a=\frac{f}{0{,}5f+a}\xrightarrow{a<<f}2a$$

Obrazem sześcianu będzie więc prostopadłościan o bokach 2a,2a,4a. Co ciekawe obraz nie będzie odwrócony wzdłuż osi optycznej.

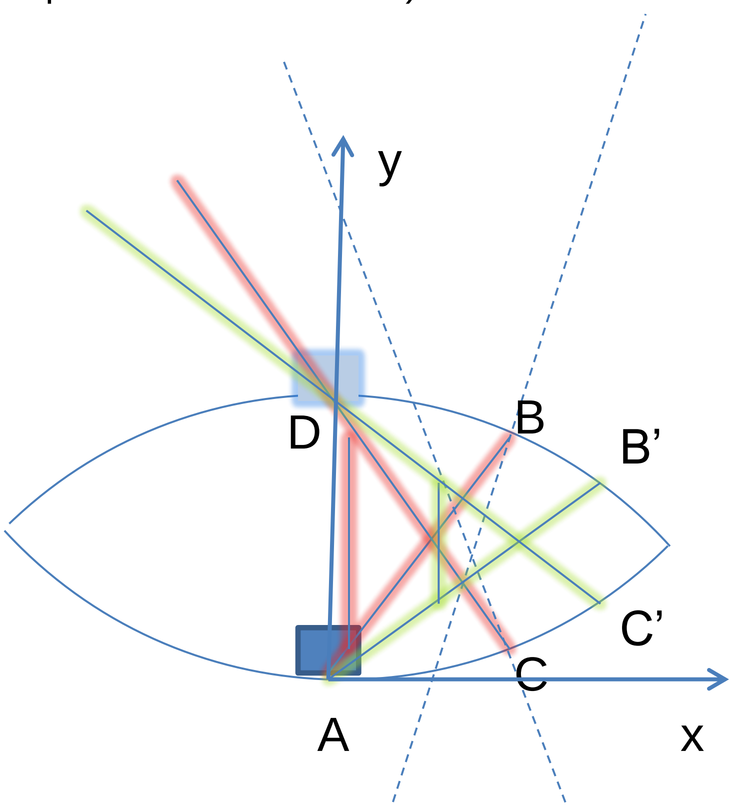
Zadanie 2

Jaki musi być kształt dwóch identycznych zwierciadeł wklęsłych złożonych ze sobą jak na rysunku, aby przedmiot postawiony dolnym zwierciadle stworzył pozorny obraz tuż nad górnym. Wysokość całej konstrukcji wynosi D.



Zadanie 2 - rozwiązanie

Umieśćmy układ współrzędnych o środku w punkcie przedmiotu i osiach skierowanych równolegle do osi symetrii układu. Obraz będzie więc miał współrzędne (0,D) Ponieważ zwierciadła są identyczne (a więc sytuacja musi być symetryczna) odcinek BC musi być równoległy do osi optycznej. Skoro tak, długość drogi biegu promienia od przedmiotu do odbicia i dalej do płaszczyzny połączenia zwierciadeł musi być równa niezależnie od miejsca odbicia (i równa połowie całkowitej drogi biegu promienia od przedmiotu do obrazu):



$$AB + \frac{BC}{2} = const$$

$$\sqrt{y^2 + x^2} + y - \frac{D}{2} = const.$$

W szczególności dla punktu (0,D):

$$D + \frac{D}{2} = const. \Rightarrow const. = \frac{3D}{2}$$

a więc:

$$\sqrt{y^2 + x^2} + y = 4D$$

$$x^2 = 16D^2 - 4Dy$$

$$y = -\frac{x^2}{4D} + \frac{D}{4}$$ dla pow. górnej

i dla pow. dolnej: $$y = \frac{x^2}{4D} - \frac{3D}{4}$$

Zadanie 3

W zbiorniku wodnym o głębokości H=3 metrów pływa wypełniona powietrzem sfera o promieniu R=0,5m i grubości ścianek d=1cm wykonana ze szkła o współczynniku załamania n_s=1,5 i gęstości ρ=2500 kg/m^3.

Jak głęboki będzie się wydawał zbiornik gdyby patrzeć z góry przez sferę prostopadle do powierzchni wody?

Przyjmij współczynnik załamania wody równy n_w=1,3 i jej gęstość równą ρ_w=1000kg/m^3

Zadanie 3 - rozwiązanie

Ponieważ promień krzywizny jest dużo większy od grubości ścianek, traktujemy sferę jak dwie soczewki cienkie rozsunięte o odległość równą średnicy sfery. Równanie soczewkowe (uwzględniające różne współczynniki załamania po obu stronach soczewki):

$$D = \frac{(n_s - n_p)}{R_1} + \frac{(n_o - n_s)}{R_2} \qquad D = \frac{n_o}{o} + \frac{n_p}{p}$$

gdzie D to moc soczewki, n_p i $n_{o.}$ to kolejno współczynniki załamania ośrodka w którym umieszony jest przedmiot i w którym tworzy się obraz.

Dla dolnej części sfery:

$$D = \frac{(n_w - n_s)}{R} + \frac{(1 - n_s)}{R - d} = -0{,}62D$$

Dla górnej części sfery:

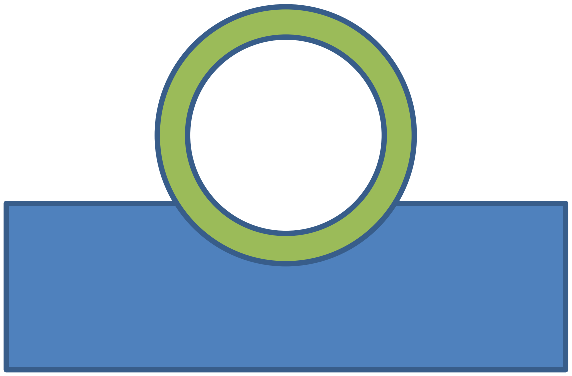
$$D = \frac{(n_s - 1)}{-(R - d)} + \frac{(1 - n_s)}{-R} = -0{,}02D$$

Obie soczewki będą więc rozpraszające i stworzą obraz pozorny. Aby obliczyć jego położenie trzeba określić najpierw głębokość zanurzenia sfery. Objętość części sfery zanurzonej na głębokość h wyraża się przez:

$$V_z = \frac{\pi h^3}{3}(3R - h)$$

zaś jej masa przez:

$$M_z = \frac{\rho\pi}{3}\left[h^3(3R - h) - (h - d)^3(3R - h - 2d)\right]$$



Zadanie 3 - rozwiązanie

Z prawa Archimedesa:

$$V_z \rho_w g = gM_z$$

$$\frac{M_z}{V_z} = \rho_w$$

$$\frac{\rho_w}{\rho} = 1 - \frac{(h-d)^3(3R-h-2d)}{h^3(3R-h)} \xrightarrow{R>>d} \frac{(h-d)^3}{h^3} = 1 - \frac{\rho_w}{\rho}$$

$$h \cong 6cm$$

Dno zbiornika znajdzie się więc od dolnego wierzchołka sfery w odległości przedmiotowej równej:

$$p_1 = H - h = 2{,}94m$$

Podstawiając do równania soczewkowego dla dolnej części sfery:

$$D_1 = \frac{n_{pow}}{o_1} + \frac{n_{wody}}{p_1}$$

$$-0{,}62D = \frac{1{,}0}{o_1} + \frac{1{,}3}{2{,}94m}$$

$$o_1 = -0{,}94m$$

Odległość przedmiotowa dla górnej części sfery musi być liczona względem jej wewnętrznego wierzchołka:

$$p_2 = 2R - d - o_1$$

Podstawiając do równania soczewkowego dla górnej części sfery:

$$D_2 = \frac{n_{pow}}{o_2} + \frac{n_{pow}}{p_2}$$

$$-0{,}02D = \frac{1{,}0}{o_2} + \frac{1{,}0}{1{,}93m}$$

$$o_2 = -1{,}86m$$

Pozorna głębokość zbiornika oglądanego przez sferę wyniesie więc:

$$H' = H + 2R - h + o_2 = 2{,}08m$$

Zadanie 4

Tęcza powstaje przez odbicie wewnętrzne światła słonecznego w kroplach deszczu. Jest to możliwe gdyż kierunki odbicia nie są rozłożone równomiernie, lecz skupiają się wokół pewnego kierunku - maksymalnego kąta odbicia zwanego promieniem tęczy. Dlatego obszar na zewnątrz od tęczy jest ciemniejszy niż wewnątrz i obramowany bardzo jasnym łukiem.
Określ szerokość kątową łuku tęczy pierwszego rzędu. Przyjmij współczynnik załamania wody równy n=1,336.

Więcej o fizyce tęczy można znaleźć w artykule naukowym:
J.A. Adam „The mathematical physics of rainbows and glories” Physics Reports 356 (2002) 229-365

Zadanie 4 - rozwiązanie

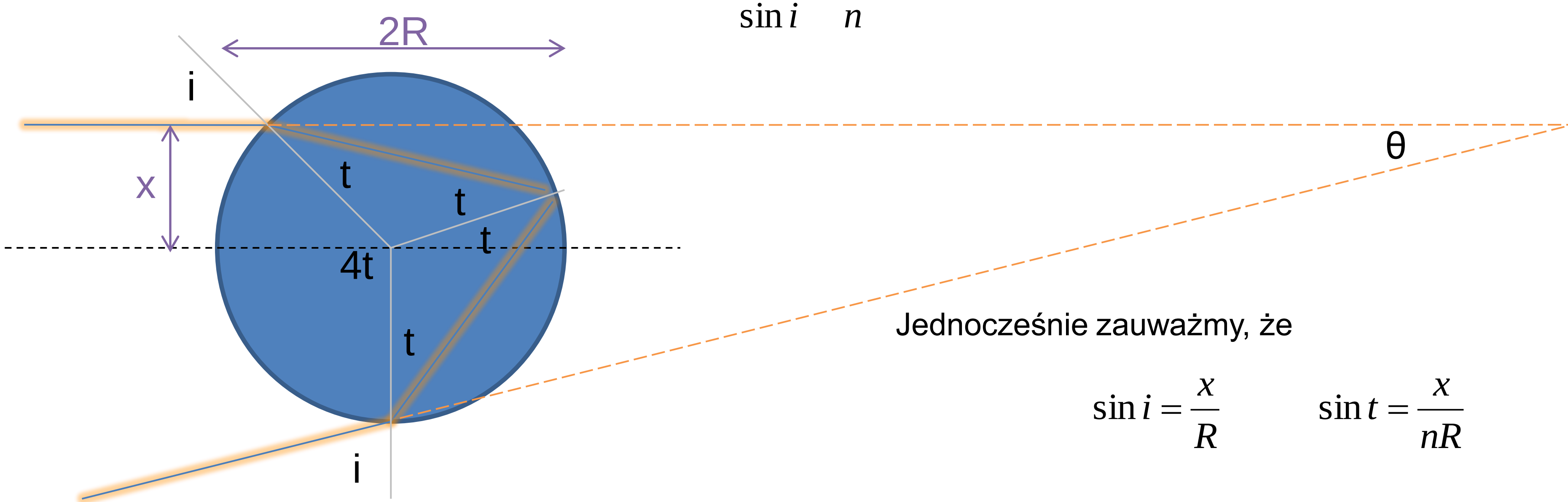
Promień równoległej wiązki światła słonecznego pada na kulistą kroplę pod kątem *i* względem normalnej do powierzchni, tj. promienia kuli, w wyniku załamania wewnątrz kropli propaguje się on pod kątem *t* do promienia kuli. Po wewnętrznym odbiciu pada znów na ściankę pod kątem *t* i wychodzi pod kątem *i* do promienia kuli. Oczywiście możliwe jest więcej niż jedno odbicie co prowadzi do powstania tęczy drugiego i wyższych rzędów, które jednakże mają coraz mniejsze natężenie.

Z geometrii problemu wynika, że kąt θ (kąt tęczy) będzie wyrażał się przez kąt padania *i* oraz odbicia *t* zależnością:

$$\theta = 4t - 2i$$

Jednocześnie z prawa załamania wynika, że

$$\frac{\sin t}{\sin i} = \frac{1}{n}$$



Jednocześnie zauważmy, że

$$\sin i = \frac{x}{R} \qquad \sin t = \frac{x}{nR}$$

Zadanie 4 - rozwiązanie

Funkcję całkowitego kąta ugięcia promienia od odległości *x* między padającym promieniem a osią kropli można więc zapisać w postaci:

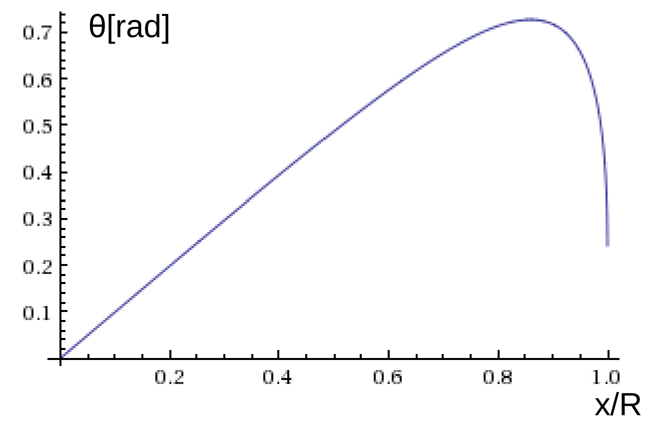
$$\theta(x) = 4\arcsin\frac{x}{nR} - 2\arcsin\frac{x}{R}$$

Aby znaleźć minimum tej funkcji przyrównujemy jej pochodną do zera:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{4}{nR\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2R^2}}} - \frac{2}{R\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}}} = 0$$

$$2\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}} = n\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2R^2}}$$

$$x = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}R \cong 0{,}86R$$



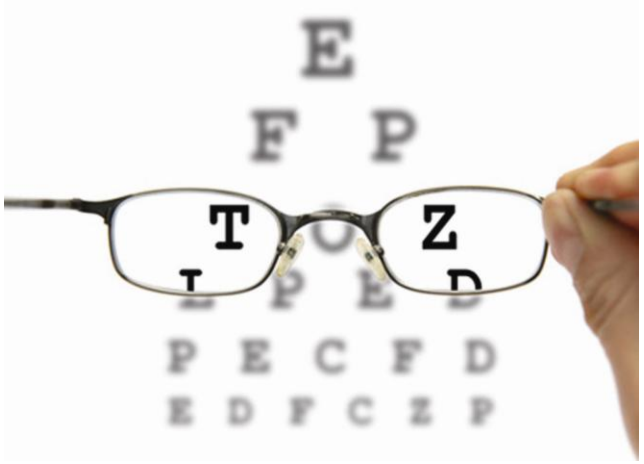
Jak widać z wykresu funkcja całkowitego kąta odbicia ma maksimum dla

$$\theta_{\max} = 4\arcsin\sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} = 0{,}727\,rad = 41{,}6^\circ$$

i dla promieni bliskich tej wartości jest wolnozmienna. Dlatego w tym kierunku odbijane jest więcej światła tworząc jasny łuk. Ludzkie oko skupia promienie pochodzące od kropel w położeniach tworzących właśnie taki kąt z kierunkiem światła słonecznego. Widzimy pozorny łuk w nieskończoności, którego szerokość kątowa jest podwojonym kątem θ_{max} czyli wynosi ok. 83°.

Zadanie 5

- Oblicz stosunek wielkości obiektu widzianego krótkowzrocznym okiem o wadzie 4D skorygowanym soczewką kontaktową lub okularami umieszczonymi w odległości 15mm od wierzchołka rogówki. Załóż, że miarowe (zdrowe) oko można przybliżyć pojedynczą soczewką cienką o mocy 60D znajdującą się w zewnętrznym wierzchołku rogówki oraz że odległość obserwowanego przedmiotu jest dużo większa niż rozmiary oka.



Zadanie 5 - rozwiązanie

- Najpierw należy obliczyć potrzebną moc szkła korekcyjnego. Zgodnie z warunkami zadania miarowe oko ma moc optyczną D_m=60D, co oznacza, że po korekcji cały układ optyczny powinien skupiać wiązkę promieni równoległych (obrazować przedmioty znajdujące się w nieskończoności) na ekranie oddalonym o 16,7mm rogówki. Krótkowzroczność o wartości 4D oznacza, że soczewka oka ma moc D_o=64D i musi być zastosowana korekcja.
- W przypadku soczewki kontaktowej położenie szkła korekcyjnego jest tożsame z położeniem soczewki modelującej oko, więc jej moc optyczna D_{KK} będzie równa:

$$D_m = D_o + D_{KK}$$

$$D_{KK} = D_m - D_o = -4{,}00D$$

- W przypadku korekcji okularowej należy dodatkowo uwzględnić odległość d=15mm między soczewką korekcyjną a soczewką modelującą oko. Soczewka korekcyjna stworzy obraz przedmiotu, który z kolei zostanie zobrazowany przez oko. A więc moc optyczna korekcji okularowej D_{KO} musi wynosić:

$$\begin{cases} \frac{1}{\infty} + \frac{1}{o} = D_{KO} \\ \frac{1}{d-o} + D_m = D_o \end{cases}$$

$$\frac{1}{D_{KO}} = \frac{d\left(D_o - D_m\right) - 1}{D_o - D_m}$$

$$D_{KO} = \frac{D_o - D_m}{d\left(D_o - D_m\right) - 1} = -4{,}25D$$

Zadanie 5 - rozwiązanie

- Teraz można przystąpić do obliczania powiększenia oka skorygowanego okularami i soczewką kontaktową. Jeśli oko miarowe patrzy na obraz z odległości 1m oznacza to, że akomodacja zwiększyła jego moc optyczną tak, aby ostry obraz tworzony był na siatkówce, tj. w odległości $1/D_m$ od wierzchołka rogówki. Postępując analogicznie jak wcześniej:
- Dla korekcji kontaktowej:

$$\frac{1}{p} + D_m = D_{KK} + D_{akom}$$

$$m_{KK} = \left| \frac{1}{pD_m} \right| = \frac{1}{pD_m}$$

Dla korekcji okularowej:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p-d} + \dfrac{1}{o'} = D_{KO} \\ \dfrac{1}{d-o'} + D_m = D'_{akom} \end{cases} \Rightarrow o' = \frac{p-d}{D_{KO}(p-d)-1}$$

$$m_{KO} = \left| \frac{o'}{p} \right| \left| \frac{1}{(d-o')D_m} \right| = \frac{o'}{p(o'-d)D_m}$$

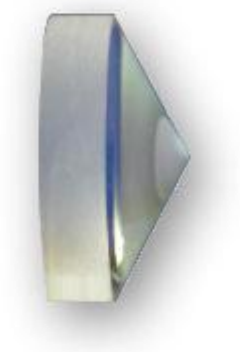
- Porównując powiększenia otrzymujemy ostateczny wynik:

$$\frac{m_{KO}}{m_{KK}} = \frac{o'}{d-o'} = \frac{p-d}{dD_{KO}(p-d)-p} \xrightarrow{p>>d} \frac{1}{dD_{KO}-1} = 0{,}94$$

- Obraz widziany przez okulary jest więc mniejszy o 6% (przy zadanej wadzie refrakcyjnej i odległości okularów od oka) od obrazu widzianego przez oko z soczewką kontaktową, które jest optycznie tożsame (przy szeregu milcząco przyjętych idealizacji) z okiem miarowym.

Zadanie 6

- Zaprojektuj obrazujący płasko-wypukły element optyczny o średnicy 10 cm będący soczewką o ogniskowej rosnącej liniowo z odległością od środka od 0 do 10cm. Załóż, że element wykonany jest ze szkła o współczynniku załamania 1,5.



Zadanie 6 - rozwiązanie

- Klasyczna soczewka płasko-wypukła ma jedną powierzchnię płaską, a drugą kulistą o promieniu krzywizny R, równym:

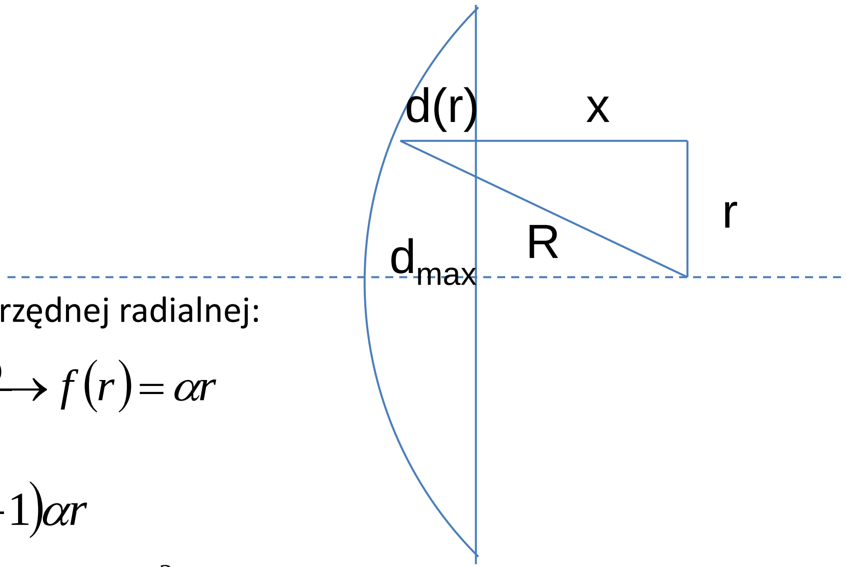
$$\frac{1}{f}=\frac{(n-1)}{R}\Rightarrow R=(n-1)f$$

- Z geometrii wynika, że profil soczewki, tj. zależności grubości od współrzędnej radialnej wyniesie

$$\begin{cases} d(r)+x=\sqrt{R^2-r^2} \\ d_{\max}+x=R \end{cases}$$

$$d(r)=d_{\max}+\sqrt{R^2-r^2}-R$$

$$d(r)=d_{\max}+\sqrt{(n-1)^2 f^2-r^2}-(n-1)f$$



- Jeśli założymy, że ogniskowa zależy liniowo od współrzędnej radialnej:

$$f(r)=\alpha r+\beta \xrightarrow{f(0)=0} f(r)=\alpha r$$

- Otrzymamy zależność:

$$d(r)=d_{\max}+\sqrt{(n-1)^2\alpha^2 r^2-r^2}-(n-1)\alpha r$$

$$d(r)=d_{\max}+r\left[\sqrt{(n-1)^2\alpha^2-1}-(n-1)\alpha\right]\xrightarrow[n=1,5]{\alpha=2} d_{\max}-r$$

- Grubość elementu będzie więc zależała liniowo od współrzędnej radialnej. Oznacza to, że element będzie stożkiem. Element taki nazywany jest aksikonem.

Zadanie 7

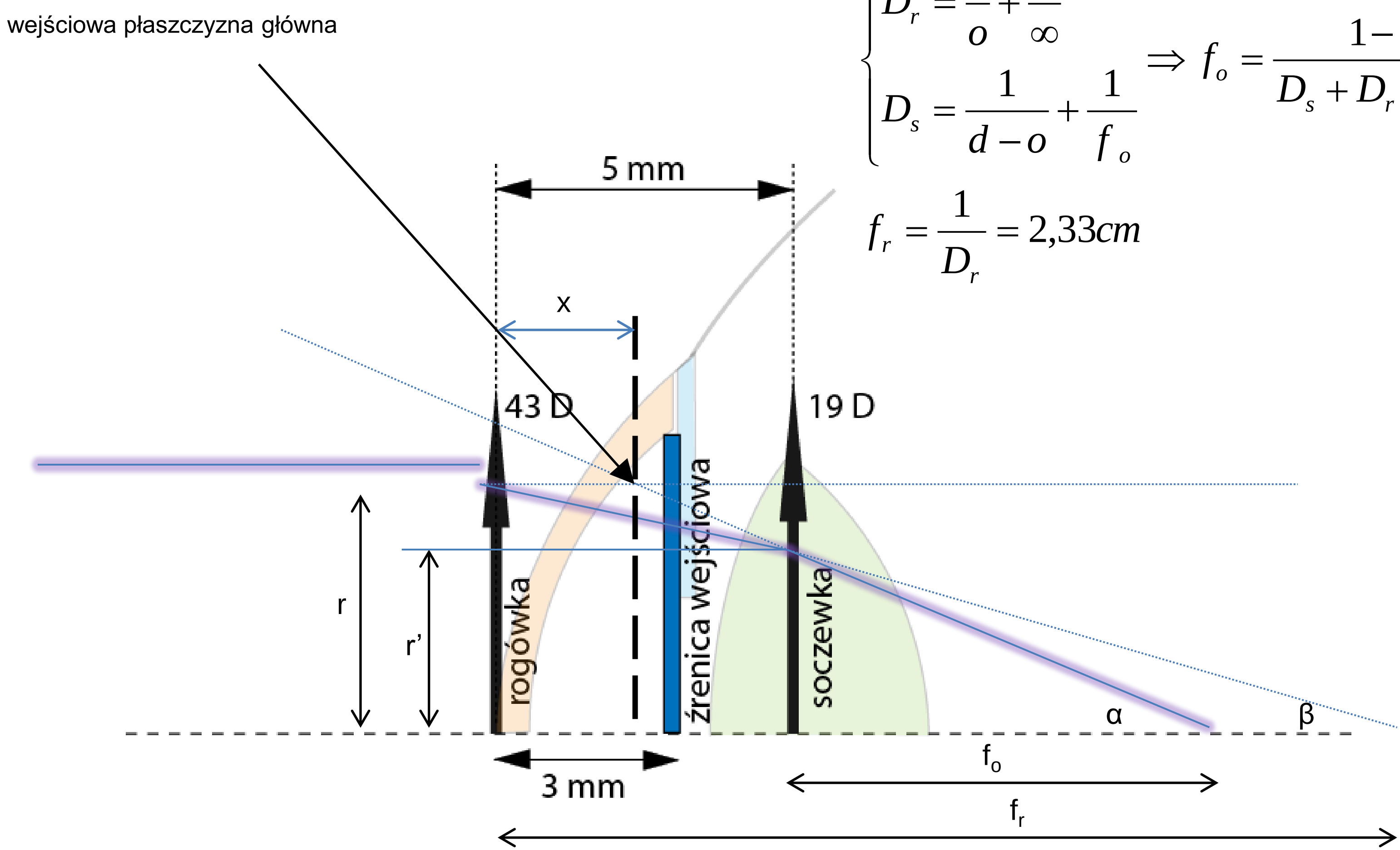
- Układ optyczny oka można zamodelować jako dwie soczewki cienkie o mocy 43D (rogówka) i 19D (soczewka oka) rozsunięte na odległość 5mm. Znajdź moc optyczną takiego układu i jego płaszczyzny główne. Wiedząc, że źrenica wejściowa układu znajduje się wewnątrz oka w odległości 3 mm od rogówki znajdź źrenicę wyjściową.

Zadanie 7 - rozwiązanie

- Zacznijmy od znalezienia ogniskowej f_o układu względem drugiej soczewki (soczewki oka):

$$\begin{cases} D_r = \dfrac{1}{o} + \dfrac{1}{\infty} \\ D_s = \dfrac{1}{d-o} + \dfrac{1}{f_o} \end{cases} \Rightarrow f_o = \frac{1 - dD_r}{D_s + D_r - dD_r D_s} = 1{,}36cm$$

$$f_r = \frac{1}{D_r} = 2{,}33cm$$



Zadanie 7 - rozwiązanie

- Teraz z relacji geometrycznych możemy znaleźć położenie x wejściowej płaszczyzny głównej względem rogówki:

$$\begin{cases} \tan\beta = \dfrac{r}{f_r} = \dfrac{r'}{f_r - d} \\ \tan\alpha = \dfrac{r}{d + f_o - x} = \dfrac{r'}{f_o} \end{cases} \Rightarrow x_{we} = x = d + f_o - \frac{f_o f_r}{(f_r - d)} = 1{,}3mm$$

- W sposób analogiczny, zamieniając soczewkę i rogówkę miejscami (lub oświetlając je z przeciwnej strony) znajdujemy położenie wyjściowej płaszczyzny głównej:

$$f_o' = \frac{1 - dD_s}{D_s + D_r - dD_r D_s} = 1{,}56cm \qquad f_s = \frac{1}{D_s} = 5{,}26cm$$

$$x' = d + f_o' - \frac{f_o' f_s}{(f_s - d)} = 0{,}34cm$$

- Odległość ta jest liczona od soczewki w kierunku rogówki. Wyjściowa płaszczyzna główna będzie więc leżała od rogówki w odległości:

$$x_{wy} = d - x' = 1{,}6mm$$

- Moc optyczna oka będzie związana z ogniskową f_o lecz liczoną od wyjściowej płaszczyzny głównej, a więc:

$$D_o = \frac{1}{f_o + x'} = 58{,}8D$$

Zadanie 7 - rozwiązanie

- Pozostaje obliczyć położenie źrenicy wyjściowej. Załóżmy, że położenia obu źrenic będziemy liczyć od rogówki. Źrenica wyjściowa będzie obrazem źrenicy wejściowej w całym układzie optycznym oka, a więc:

$$D_o = \frac{1}{z_{we} + x_{we}} + \frac{1}{z_{wy} - x_{wy}}$$

$$z_{wy} = \frac{z_{we} + x_{we}}{D_o\left(z_{we} + x_{we}\right) - 1} + x_{wy} \xrightarrow{z_{we} = -3mm} z_{wy} = 3{,}15mm$$

- Oko ma więc moc optyczną 58,8D, jego przedmiotowa (wejściowa) płaszczyzna znajduje się 1,3mm za rogówką, obrazowa (wyjściowa) płaszczyzna główna 1,6mm za rogówką. Źrenica wyjściowa znajduje się więc 0,15mm za źrenicą wejściową, tj. w odległości 3,15mm od rogówki. Parametry te są bardzo bliskie rzeczywistym właściwościom optycznym ludzkiego oka.