PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Entropia
Fizyka statystyczna

Zadania z rozwiązaniami

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Entropia – zadania z rozwiązaniami

Zad.01 Woda o masie 1kg zostaje podgrzana przy stałym ciśnieniu p_0=1atm od temperatury t_1=20 °C do temperatury t_2=99 °C. Ile razy wzrosła liczba dostępnych stanów kwantowych dla tego układu (wody) w wyniku podgrzania. Przyjąć c_w=4190J/(kg K)? O ile wzrosła energia wewnętrzna wody?

$$\Delta S = \int \frac{\partial Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} mc_w \frac{dT}{T} = mc_w \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$T = t + 273{,}16$$

$$S = k \ln \Omega$$

$$\Delta S = k \ln \Omega_2 - k \ln \Omega_1$$

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \exp(\frac{\Delta S}{k}) = \exp(7x10^{25})$$

$$\Delta U = mc_w \left(T_2 - T_1\right)$$

Zad.02 Pewna masa cieczy m o temperaturze T_1 została zmieszana w naczyniu kalorymetrycznym z taką samą porcją tej samej cieczy o temperaturze T_2. Ciepło właściwe cieczy c_w. Obliczyć zmianę entropii zmieszanej cieczy. Wykazać, że ta zmiana entropii jest zawsze nieujemna.

Temperatura końcowa mieszaniny: $$T_k = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$\Delta S_1 = \int \frac{\partial Q_1}{T} = \int_{T_1}^{T_k} mc_w \frac{dT}{T} = mc_w \ln \frac{T_k}{T_1}$$

$$\Delta S_2 = \int \frac{\partial Q_2}{T} = \int_{T_2}^{T_k} mc_w \frac{dT}{T} = mc_w \ln \frac{T_k}{T_2}$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc_w \ln \frac{T_k}{T_1} + mc_w \ln \frac{T_k}{T_2} = mc_w \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1T_2}$$

$$\frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1T_2} = \frac{(T_1 + T_2)^2 - 4T_1T_2 + 4T_1T_2}{4T_1T_2} = \frac{(T_1 - T_2)^2}{4T_1T_2} + 1 \geq 1$$

Zad.03 Masę 1kg wody o temperaturze 0 °C ogrzewano na dwa sposoby. W pierwszym przypadku doprowadzono do kontaktu ze źródłem ciepła o temperaturze 100 °C i poczekano aż woda osiągnie 100 °C. W drugim przypadku, najpierw ogrzano 1kg wody do temperatury 50 °C przez kontakt ze źródłem ciepła o temperaturze 50 °C a następnie do 100 °C poprzez kontakt ze źródłem o temperaturze 100 °C. Jak zmieniła się entropia ogrzewanej wody i źródeł ciepła w obu przypadkach?

$$\Delta S_w = \int \frac{\partial Q}{T} = \int_{T_0}^{T_{100}} mc_w \frac{dT}{T} = mc_w \ln \frac{T_{100}}{T_0} \qquad T_{100} = (273{,}16 + 100)K$$

$$\Delta S_w = 1307{,}1 \frac{J}{K}$$

Zmiana entropii ogrzewanej wody w obu przypadkach będzie taka sama.

$$\Delta S_{r1} = -\frac{mc_w (T_{100} - T_0)}{T_{100}} = -1122{,}8 \frac{J}{K}$$

$$\Delta S_{r2} = -\frac{mc_w (T_{50} - T_0)}{T_{50}} - \frac{mc_w (T_{100} - T_{50})}{T_{100}} = -(648{,}3 + 561{,}4)\frac{J}{K} = -1209{,}7 \frac{J}{K}$$

$$\Delta S_{total,1} = \Delta S_w + \Delta S_{r1} = 184{,}3 \frac{J}{K} \qquad \Delta S_{total,2} = \Delta S_w + \Delta S_{r2} = 97{,}4 \frac{J}{K}$$

Zad.04 W teorii Wielkiego-Wybuchu wszechświat rozszerza się sferycznie tak samo w każdym kierunku. W wyniku tego procesu temperatura promieniowania obniża się. Bazując na rozważaniach termodynamicznych i przyjmując cały proces jako w przybliżeniu adiabatyczny, znaleźć zależność pomiędzy temperaturą promieniowania a promieniem wszechświata.

$$TdS = dU + pdV$$

W procesie adiabatycznym: $dS = 0$

Ciśnienie promieniowania: $p = \frac{U}{3V}$

Stąd otrzymujemy $$\frac{dU}{U} = -\frac{dV}{3V}$$

Czyli $U \sim V^{-1/3}$

Energia emitowana przez jednostkę objętości u: $\frac{U}{V} = u \sim T^4$

Czyli $\frac{V^{-1/3}}{V} \sim T^4$ $\quad V^{-4/3} \sim T^4$ $\quad R^{-4} \sim T^4$

Stąd: $RT = const$

Zad.05 Izolowany cieplnie cylinder podzielony jest ruchomą przegrodą na dwie takie same części. W 1-ej znajduje się 1 dm3 powietrza w temperaturze T_1=200 K i pod ciśnieniem p_1=2 atm, w drugiej powietrze o temperaturze T_2=300K i pod ciśnieniem p_2=1 atm. Po zwolnieniu przegrody układ uzyskuje stan równowagi. Obliczyć temperaturę, ciśnienie oraz zmianę entropii.

$$p_1V = n_1RT_1 \qquad p_2V = n_2RT_2$$

Energia wewnętrzna całości pozostaje stała, więc:

$$\Delta U = 0 = \Delta U_1 + \Delta U_2 = n_1c_vR(T - T_1) + n_2c_vR(T - T_2)$$

Stąd $$T = T_1\frac{1+\dfrac{p_2}{p_1}}{1+\dfrac{p_2}{p_1}\dfrac{T_1}{T_2}} = 225K \qquad p = \frac{T}{2}\left(\frac{p_1}{T_1}+\frac{p_2}{T_2}\right) = 1.5atm$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 \qquad \Delta S_1 = \int_{T_1}^{T}\frac{dU_1}{T} + \int_{V}^{V_1}\frac{pdV}{T}$$ analogicznie ΔS_2

$$\Delta S = \frac{p_1V}{T_1}\left(\frac{c_v}{R}\ln\frac{T}{T_1} + \ln\frac{p_1T}{pT_1}\right) + \frac{p_2V}{T_2}\left(\frac{c_v}{R}\ln\frac{T}{T_2} + \ln\frac{p_2T}{pT_2}\right)$$

W niskich temperaturach można przyjąć ciepło molowe dla stałej objętości $c_V = \frac{3}{2}R$

Zad.06 Bryła lodu o masie 1kg i temperaturze 0 °C zamienia się w wodę o temperaturze 0 °C pod ciśnieniem 1 atm. Przyjmując gęstość lodu d_1=900 kg/m^3 i gęstość wody d_2=1000 kg/m^3 oraz ciepło topnienia lodu c_l=3.34 x 10^5 J/kg, obliczyć wykonaną pracę, dostarczone ciepło oraz zmianę entropii.

$$\Delta W = -p\Delta V = -1013kP\left(\frac{m}{d_1} - \frac{m}{d_2}\right) = -\frac{101.3}{9} J = -11.26 J$$

$$\Delta Q = mc_l = 3.34 \cdot 10^5 J$$

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W \approx \Delta Q = 3.34 \cdot 10^5 J$$

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_0} = 1.22 \cdot 10^3 \frac{J}{K}$$

Fizyka statystyczna – zadania z rozwiązaniami

Zad.07 Dla klasycznego oscylatora o masie m, częstości drgań własnych w i energii całkowitej E znaleźć prawdopodobieństwo znalezienia tego oscylatora w odległości x od punktu równowagi.

Prawdopodobieństwo znalezienia oscylatora w przedziale (x, x+dx) jest proporcjonalne do czasu przebywania oscylatora w tym przedziale.

$$P(x, x+dx) = 2\frac{dt}{T} = p(x)dx \qquad dt = \frac{dx}{v(x)}$$

$$E = \frac{mw^2 A}{2} = \frac{mw^2 x^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \qquad A = \frac{2E}{mw^2} \qquad v = \sqrt{\frac{2E}{m} - w^2 x^2}$$

$$T = 2\int_{-A}^{A} dt = 2\int_{-A}^{A} \frac{dx}{v(x)} = \frac{2\pi}{w}$$

Gęstość prawdopodobieństwa

$$p(x) = 2\frac{w}{2\pi v(x)} = \frac{w}{\pi\sqrt{\frac{2E}{m} - w^2 x^2}} = \frac{w}{\pi}\sqrt{\frac{m}{2E - mw^2 x^2}}$$

Zad.08 Układ N cząstek o spinie ½ może przyjmować wartości rzutu na oś z zarówno 1/2 jak i -1/2 z takim samym prawdopodobieństwem. Wykazać, że makrostan układu odpowiadający maksymalnej liczbie mikrostanów odpowiada sytuacji, gdy połowa cząstek ma spin zgodnie z osią z a druga połowa przeciwnie. Znaleźć entropię układu w tym stanie.

$N_\uparrow \qquad N_\downarrow$ Liczba cząsteczek o spinie zgodnym z osią z i przeciwnym

$$N_\uparrow + N_\downarrow = N$$

Liczba stanów realizujących taki makrostan wynosi:

$$\Omega = \frac{N!}{N_\uparrow! N_\downarrow!} = \frac{N!}{N_\uparrow!(N-N_\uparrow)!}$$

$$\ln\Omega = \ln\frac{N!}{N_\uparrow!(N-N_\uparrow)!} \approx N\ln N - N_\uparrow \ln N_\uparrow - (N-N_\uparrow)\ln(N-N_\uparrow)$$

$$\frac{\partial \ln\Omega}{\partial N_\uparrow} \approx -\ln N_\uparrow + \ln(N-N_\uparrow) = 0 \qquad \text{to} \qquad N_\uparrow = \frac{N}{2} = N_\downarrow$$

$$S = k\ln\Omega \approx k\left[N\ln N - N_\uparrow \ln N_\uparrow - (N-N_\uparrow)\ln(N-N_\uparrow)\right] = kN\ln 2$$

Zad.09 Dany jest układ złożony z N cząsteczek nieoddziaływujących ze sobą, które mogą przyjmować tylko dwie wartości energii: E_0 i E_1. Zakładając, że układ znajduje się w równowadze w temperaturze T, znaleźć średnią energię przypadającą na jedną cząsteczkę tego układu. Do jakiej wartości dąży ta średnia energia , gdy temperatura dąży a) do zera, b) do nieskończoności.

$$u = \frac{N_0 E_0 + N_1 E_1}{N_0 + N_1} = \frac{N E_0 e^{-\beta E_0} + N E_1 e^{-\beta E_1}}{N e^{-\beta E_0} + N e^{-\beta E_1}} = \frac{E_0 e^{-\beta E_0} + E_1 e^{-\beta E_1}}{e^{-\beta E_0} + e^{-\beta E_1}}$$

$$u = \frac{E_0 + E_1 e^{-\beta \Delta E}}{1 + e^{-\beta \Delta E}} \qquad \Delta E = E_1 - E_0$$

$$T \to 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{kT} \to \infty \Rightarrow$$

$$u \approx \left(E_0 + E_1 e^{-\beta \Delta E}\right)\left(1 - e^{-\beta \Delta E}\right) = E_0 + \Delta E e^{-\beta \Delta E}$$

$$T \to \infty \Rightarrow \beta = \frac{1}{kT} \to 0 \Rightarrow$$

$$u \approx \frac{1}{2}\left(E_0 + E_1 - \beta E_1 \Delta E\right)\left(1 + \frac{1}{2}\beta \Delta E\right) \approx \frac{1}{2}\left(E_0 + E_1\right) - \frac{\beta}{4}\left(\Delta E\right)^2$$

Zad.10 Pewien układ złożony jest z nieoddziaływujących molekuł, które mogą przyjmować tylko 3 dozwolone wartości energii: 0, e, 10e. Pokazać, że istnieje taka temperatura krytyczna Tc poniżej której tylko najniższe dwa poziomy energetyczne są obsadzone.

$$N = N_0 + N_e + N_{10e}$$

$$\frac{N_e}{N_0} = e^{-\beta e} \qquad \frac{N_{10e}}{N_0} = e^{-\beta 10e}$$

Otrzymujemy: $$N_{10e} = \frac{N}{1 + e^{\beta 9e} + e^{\beta 10e}}$$

Poziom ten będzie nieobsadzony, jeśli liczba cząstek na tym poziomie będzie mniejsza od 1.

$$1 = \frac{N}{1 + e^{\frac{9e}{kT_c}} + e^{\frac{10e}{kT_c}}}$$

Dla N >>1

$$e^{\frac{10e}{kT_c}} \approx N \Rightarrow T_c \approx \frac{10e}{k \ln N}$$

Zad.11 Atomy wodoru w atmosferze pewnej gwiazdy mają średnią energię równą 1eV. Jaka jest temperatura na powierzchni tej gwiazdy? Jaki jest stosunek atomów z elektronem wzbudzonym do 3 orbity w stosunku do atomów w stanie podstawowym? Jaką część stanowią atomy zjonizowane?

$$u = \frac{3}{2}kT \Rightarrow T = \frac{2u}{ku} = 7.7x10^3 K$$

Ponieważ: $$E_n = -\frac{13.6eV}{n^2}$$ $$\frac{N_3}{N_1} = \exp\left(\frac{E_1 - E_3}{kT}\right)$$

Stąd $$\frac{N_3}{N_1} \approx 1.33x10^{-8}$$

$$\frac{N_{jon}}{N_3} = \exp\left(\frac{E_3 - 0}{kT}\right) \approx 0.1$$ czyli $$N_{jon} \approx 0.1N_3$$

Zad.12 Znaleźć średnią energię fotonu, dla układu fotonów znajdujących się w równowadze termicznej z wnęką. Ile wynosi ta energia dla temperatury T=6000 K?

Wskazówka: $$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \approx 2.41 \qquad \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \approx \frac{\pi^4}{15}$$

$$u = \frac{V}{N}\int_0^\infty E \cdot g(E) \cdot f_{BE} dE \qquad \frac{N}{V} = \int_0^\infty g(E) \cdot f_{FD} dE \qquad g(E) = \frac{8\pi E^2}{(hc)^3}$$

$$u = \frac{\int_0^\infty E^3 \cdot \frac{1}{e^{E/kT} - 1} dE}{\int_0^\infty E^2 \cdot \frac{1}{e^{E/kT} - 1} dE} \qquad \frac{E}{kT} = x \qquad u = kT \frac{\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} dx}{\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} dx}$$

$$u = kT \frac{\frac{\pi^4}{15}}{2.41} = 2.67kT$$

Dla T= 6000 K

$$u = 1.39eV$$

Zad.13 Wykazać, że średnia energia elektronów przewodnictwa w metalu w T=0 K wynosi 3/5 Ef, (Ef – energia Fermiego). Porównać z przypadkiem klasycznym, gdzie wszystkie nieoddziaływujące molekuły mają w T=0K zerową energię.

$$u = \frac{V}{N}\int_0^\infty E \cdot g(E) \cdot f_{FD} dE$$

dla $T = 0K$ oraz

$$E > E_f \Rightarrow f_{FD} = 0$$

$$E < E_f \Rightarrow f_{FD} = 1$$

$$\frac{N}{V} = \int_0^\infty g(E) \cdot f_{FD} dE$$

oraz

$$g(E) = C\sqrt{E}$$

$$u = \frac{1}{\int_0^\infty g(E) \cdot f_{FD} dE}\int_0^\infty E \cdot g(E) \cdot f_{FD} dE = \frac{1}{\int_0^{E_f} E^{1/2} dE}\int_0^{E_f} E^{3/2} dE =$$

$$u = \frac{\frac{2}{5} E_f^{\,5/2}}{\frac{2}{3} E_f^{\,3/2}} = \frac{3}{5} E_f$$

Zad.14 Załóżmy, że planeta Mars jest w równowadze termodynamicznej ze Słońcem i emituje tyle samo energii ile absorbuje od Słońca. Zakładamy absorpcję 100%, temperaturę Słońca 5800K, promień Słońca 6.96 x 10^8 m oraz odległość między słońcem i planetą Mars d=2.28x10^{11} m. Znaleźć temperaturę powierzchni Marsa. Zaniedbać obrót planety Mars.

Energia emitowana z powierzchni Słońca:

$$E_s = 4\pi R_s \sigma T_s^4$$

Energia emitowana z powierzchni Marsa: $E_m = 4\pi R_m \sigma T_m^4$

Energia absorbowana przez powierzchnię Marsa: $E_s \dfrac{\pi R_m^2}{4\pi d^2}$

$$E_s \frac{\pi R_m^2}{4\pi d^2} = E_m$$ stąd $$T_m = T_s \sqrt{\frac{R_s}{2d}}$$

Podstawiając dane otrzymujemy: $T_m = 226K$

Entropia – zadania do rozwiązania

Zad.15 Dla pewnego procesu termodynamicznego podana jest relacja pomiędzy entropią S a energią wewnętrzną U w postaci wzoru: $S = C\,(NVU)^{1/3}$, gdzie N jest liczbą cząstek w układzie a V jest objętością układu, C jest dodatnią stałą. Znaleźć relację łączącą p,V i T dla tego procesu oraz ciepło molowe przy stałej objętości.

Odp.

$$p = \frac{1}{V}\sqrt{NV}\left(\frac{CT}{3}\right)^{3/2} \qquad c_v = \frac{1}{2}\sqrt{T\frac{NVC^3}{3}}$$

Wskazówka: $p = -\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{S,N}$ $\qquad T = -\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N}$ $\qquad c_v = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N}$

Zad.16 Pewna substancja o cieple właściwym niezależnym od temperatury została podgrzana od temperatury T_0 do temperatury T_k poprzez kontakt z N źródłami ciepła o temperaturach: $T_1=T_0+\Delta T$, $T_2= T_0+2\Delta T$, $T_3= T_0+3\Delta T$, ... $T_N=T_K=T_0+N\Delta T$. Obliczyć zmianę entropii substancji i źródeł ciepła w tym procesie. Jaka będzie ta zmiana entropii w przypadku N dążącego do nieskończoności?

Odp.

$$\Delta S = \sum_{t=0}^{N-1}\Delta S_t = C\left(\ln\frac{T_K}{T_0} - \sum_{t=0}^{N-1}\frac{\Delta T}{T_0+(t+1)\Delta T}\right)$$

Dla N dążącego do nieskończoności:

$$\Delta S = C\left(\ln\frac{T_K}{T_0} - \int_{T_0}^{T_K}\frac{dT}{T}\right) = 0$$

Zad.17 Przewodząca ciepło, prostopadłościenna sztabka (pole podstawy A, wysokość L) wykonana z materiału o stałym cieple właściwym c_w i gęstości d, została doprowadzona podstawami do kontaktu cieplnego ze źródłami ciepła o różnych temperaturach T_1 i T_2. Po ustaleniu się temperatury w próbce, wyjęto ją i włożono do kalorymetrycznego naczynia. Wykazać, że w procesie uzyskania równowagi cieplej zmiana entropii wyniosła:

$$\Delta S = ALdc_w\left(1+\ln\frac{T_1+T_2}{2}+\frac{T_1}{T_2-T_1}\ln T_1-\frac{T_2}{T_1-T_2}\ln T_2\right)$$

Przyjęto, że $T_1<T_2$.

Zad.18 Entropia gazu idealnego wyraża się poniższym wzorem:

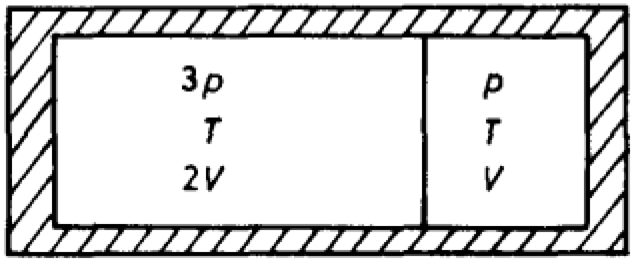
$$S=\frac{n}{2}\left(C+5R\ln\frac{U}{n}+2R\ln\frac{V}{n}\right)$$

Gdzie n-liczba moli, U-energia wewnętrzna, V-objętość układu a C-pewna stała. Znaleźć dla tego gazu ciepło molowe przy stałej objętości i przy stałym ciśnieniu.

Odp. $c_v=\frac{5}{2}R$ $\qquad$ $c_v=\frac{7}{2}R$

Wskazówka: $\frac{1}{T}=\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V$

Zad.19 Izolowany cieplnie zbiornik, w którym znajduje się gaz idealny, podzielony jest przegrodą przewodzącą ciepło na dwie części. W wyniku tego ciśnienie, temperatura i objętość każdej części wynosiły jak na rys. Następnie pozwalamy się przegrodzie poruszać i zostaje uzyskany stan równowagi. Jaka będzie temperatura i ciśnienie w stanie równowagi. Jak zmieni się entropia w tym procesie.



Odp. $T_k = T$ $\quad p_k = \frac{7}{3}p$

$$\Delta S = \frac{pV}{T}\left(6\ln\frac{9}{7} + \ln\frac{3}{7}\right) \approx \frac{pV}{T}$$

Zad.20 10kg wody o temperaturze 20 ^oC zamieniono w lód o temperaturze -10 ^oC poprzez kontakt ze źródłem ciepła o temperaturze -10 ^oC. Zakładając, że cały proces przebiega przy stałym ciśnieniu oraz przyjmując ciepło właściwe wody c_w=4190 J/(kg K), ciepło właściwe lodu c_l=2090 J/(kg K) i ciepło krzepnięcia wody c_k=3.34 x 10^5 J/kg, obliczyć zmianę entropii zamrożonej wody, zmianę entropii źródła ciepła oraz całkowitą zmianę entropii w tym procesie.

Odp.

$$\Delta S_{wody} = -15946\frac{J}{K} \qquad \Delta S_{źródła} = 16673\frac{J}{K} \qquad \Delta S_{total} = 727\frac{J}{K}$$

Fizyka statystyczna – zadania do rozwiązania

Zad.21 Znaleźć masę cząsteczki, która w temperaturze T=300 K poruszałaby się ze średnią prędkością 1m/s.

Wskazówka: $$v_{śr} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Zad.22 Dany jest układ złożony z N cząsteczek nieoddziaływujących ze sobą, które mogą przyjmować tylko dwie wartości energii: E_0 i E_1. Zakładając, że układ znajduje się w równowadze w temperaturze T, znaleźć ciepło molowe tego układu. Do jakiej wartości dąży to ciepło molowe, gdy temperatura dąży a) do zera, b) do nieskończoności.

Odp. $$c = R\left(\frac{\Delta E}{kT}\right)^2 \frac{e^{-\Delta E/kT}}{\left(1+e^{-\Delta E/kT}\right)^2} \qquad \Delta E = E_1 - E_0$$

$$T \to 0 \Rightarrow c \approx R\left(\frac{\Delta E}{kT}\right)^2 e^{-\Delta E/kT} \qquad T \to \infty \Rightarrow c \approx \frac{R}{4}\left(\frac{\Delta E}{kT}\right)^2$$

Wskazówka: Patrz zadanie Zad.09 oraz $$c = \frac{1}{n}\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{1}{n}\frac{\partial (Nu)}{\partial T}$$

Zad.23 Powierzchnia słońca ma temperaturę ok. 5800K i składa się głównie z atomów wodoru. Zakładając, że słońce jest jednorodną kulą o masie 2.0 x 10^{30} kg oraz promień słońca wynosi 6.96 x 10^{8} m, znaleźć prędkość średnią kwadratową atomów wodoru na powierzchni słońca i porównać ją z prędkością ucieczki dla atomów wodoru z powierzchni słońca. Przyjąć masę atomów wodoru jako 1.67 x 10^{-27} kg.

Wskazówka: $$v_{śr}^{2}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Zad.24 Pewien układ złożony jest z nieoddziaływujących molekuł, które mogą przyjmować tylko 3 dozwolone wartości energii: 0, e, 10e. Znaleźć średnią energię molekuły w tym układzie dla temperatury T. Określić wkład tych poziomów energetycznych do ciepła molowego układu.

Odp. $$u=e\frac{\exp\left(-\frac{e}{kT}\right)+10\exp\left(-\frac{10e}{kT}\right)}{1+\exp\left(-\frac{e}{kT_c}\right)+\exp\left(-\frac{10e}{kT}\right)}$$

$$c=\mathrm{R}e^{2}\,\beta^{2}\,\frac{\exp(-\beta e)+100\exp(-10\beta e)+81\exp(-11\beta e)}{\left(1+\exp(-\beta e)+\exp(-10\beta e)\right)^{2}}$$

dla $kT<<e$ Wkład do ciepła molowego daje najniższy poziom, wtedy:

$$c \approx \mathrm{Re}^2 \frac{\exp\left(-\frac{e}{kT}\right)}{(kT)^2}$$

dla $kT >> e$ Wkład do ciepła molowego daje najwyższy poziom, wtedy:

$$c = \frac{182}{9} R\left(\frac{e}{kT}\right)^2 \sim \frac{1}{T^2}$$

Zad.25 Obliczyć liczbę fotonów znajdujących się we wnęce będącej w równowadze termodynamicznej i mającej temperaturę T i objętość V. Obliczyć na tej podstawie liczę fotonów we Wszechświecie, przyjmując promień Wszechświata 10^{26} m oraz temperaturę Wszechświata 3K.

Wskazówka: $$g(E) = \frac{8\pi E^2}{(hc)^3}$$ $$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \approx 2.41$$

Odp $$N = \frac{8\pi V}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{E^2}{e^{E/kT} - 1}$$

Dla Wszechświata $$N = 2.29 \cdot 10^{87}$$

Zad.26 Obliczyć energię elektronów przewodnictwa w srebrze, jeśli wiadomo, że dla temperatury T=800 K prawdopodobieństwo znalezienia elektronów w tym stanie energetycznym wynosi 0.95. Energia Fermiego dla srebra w tej temperaturze wynosi 5.48 eV.

Odp. $$E = -0.203 eV + E_f = 5.28 eV$$