PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Mechanika dla Wydziału Transportu

Zadania z rozwiązaniami

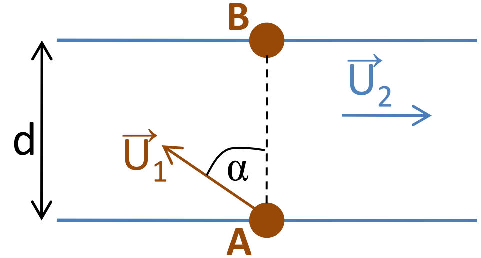
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

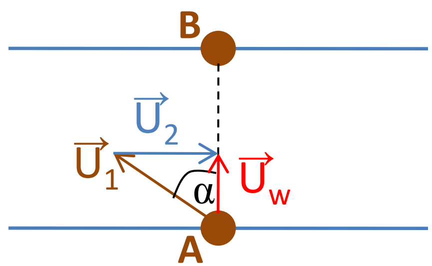
Zadanie 1.

Prędkość łódki względem wody U_1, a prędkość rzeki U_2. W jakim kierunku trzeba skierować łódkę, aby osiągnąć drugi brzeg w punkcie B leżącym dokładnie naprzeciw miejsca z którego wyruszyła (A)? Ile czasu zajmie przepłynięcie na drugi brzeg, jeśli szerokość rzeki d?



I sposób

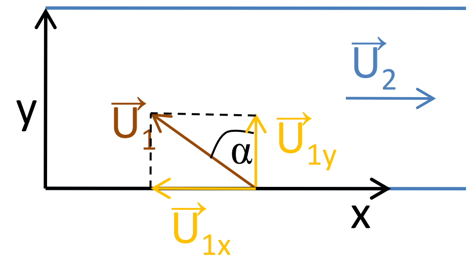
Prędkość wypadkowa $\vec{U}_w$ (prędkość łódki względem brzegu) musi być skierowana prostopadle do brzegu:



Z rysunku wynika, że: $\sin\alpha = U_2/U_1$

II sposób

Rozłóżmy prędkość $\vec{U}_1$ na składowe:



$U_{1x}/U_1 = \sin\alpha$
$U_{1x} = U_1 \sin\alpha$
$U_{1y}/U_1 = \cos\alpha$
$U_{1y} = U_1 \cos\alpha$

Aby łódka płynęła prostopadle do brzegu musi zachodzić warunek: $\vec{U}_{1x} = -\vec{U}_2$

$U_{1x} = U_2$

Wstawiając: $U_1 \sin\alpha$

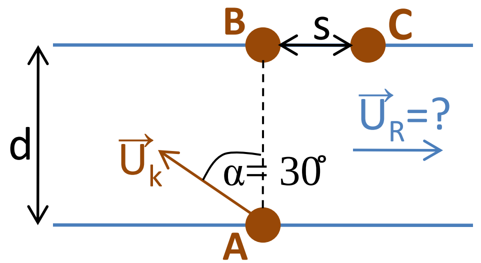
Stąd: $\sin\alpha = U_2/U_1$

Czas przeprawy na drugi brzeg: $t = d/U_{1y} = d/U_1\cos\alpha$

Zadanie 2.

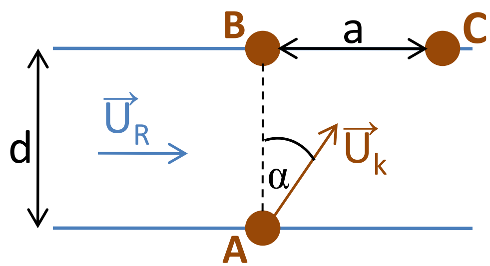
Chłopiec płynąc kajakiem usiłuje przedostać się na drugi brzeg rzeki o szerokości d. Wiosłując na stojącej wodzie może nadać kajakowi prędkość U_k.

a) Jaka jest prędkość nurtu rzeki, jeśli płynąc pod kątem $\alpha = 30^\circ$ w górę rzeki dopływa do punktu C znajdującego się w odległości s od punktu B położonego dokładnie naprzeciw miejsca startu A.



U_R- nieznana prędkość nurtu rzeki

b) W jakiej odległości od punktu B dobije kajak płynąc pod kątem $\alpha = 30^\circ$ w dół rzeki, której nurt ma prędkość U_R.

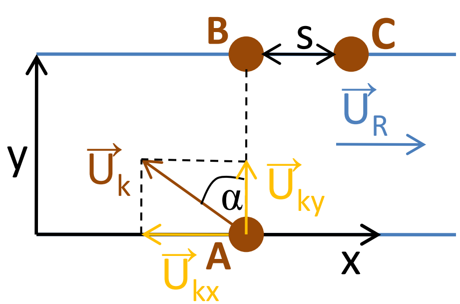


$\alpha = 30^\circ$

Rozwiązanie:

W obu przypadkach musimy rozłożyć prędkość kajaka na składowe: równoległą $\vec{U}_{kx}$ i prostopadłą $\vec{U}_{ky}$ do brzegu.

a)



Zauważmy , że sytuacja ta jest możliwa tylko w przypadku, gdy $U_R > U_{kx}$

Prędkość kajaka w kierunku y wynosi U_{ky} , a ponieważ

$U_{ky} / U_k = \cos\alpha$ to $U_{ky} = U_k \cos\alpha$

Natomiast w kierunku osi x:

Ponieważ $U_{kx} / U_k = \sin\alpha$ to $U_{kx} = U_k \sin\alpha$

Dla kąta $\alpha = 30^\circ$ mamy: $U_{kx} = U_k \sin 30^\circ = \frac{1}{2} U_k$

Ostatecznie prędkość kajaka w kierunku równoległym do brzegu wynosi:

$$U_R - \tfrac{1}{2} U_k$$

W tym kierunku kajak w czasie t przebywa drogę s:

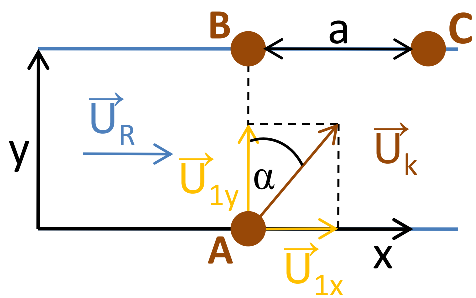
$$s = (U_R - \tfrac{1}{2} U_k)t$$

W tym samym czasie w kierunku prostopadłym do brzegu przebywa drogę d równą szerokości rzeki:
$d = t\, U_{ky}$
Gdzie $U_{ky} = U_k \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} U_k$
Wyznaczając z równań na drogę s i drogę d czas i przyrównując mamy:

$$s/(U_R - \tfrac{1}{2} U_k) = d/(\tfrac{\sqrt{3}}{2} U_k)$$
$$d(U_R - \tfrac{1}{2} U_k) = s(\tfrac{\sqrt{3}}{2} U_k)$$

Stąd prędkość nurtu rzeki: $U_R = s(\frac{\sqrt{3}}{2} U_k)/d + \frac{1}{2}U_k = \frac{1}{2}U_k(\sqrt{3}\, s/d + 1)$

b)



Postępujemy podobnie jak w przykładzie a)
Rozkładamy U_k na składowe:
$U_{kx} = U_k \sin\alpha = U_k \sin 30^\circ = \frac{1}{2} U_k$
$U_{ky} = U_k \cos\alpha = U_k \cos 30^\circ = \quad U_k$

Następnie zauważamy, że kajak w kierunku równoległym do brzegu osiąga względem brzegu prędkość:

$$U_{kx} + U_R$$

W kierunku prostopadłym do brzegu kajak ma prędkość U_{ky}.
Jednocześnie kajak przepływa odległość d(szerokość rzeki) z prędkością U_{ky} oraz szukaną odległość a z prędkością $(U_{kx} + U_R)$

$$d = U_{ky} t$$
$$a = (U_{kx} + U_R)t$$

Wyznaczając z obu równań t i przyrównując mamy:

$$d/U_{ky} = a/(U_{kx} + U_R)$$
Stąd: $a = (U_{kx} + U_R)d/U_{ky}$
Podstawiając: $U_{kx} = U_k \sin\alpha$ i $U_{ky} = U_k \cos\alpha$

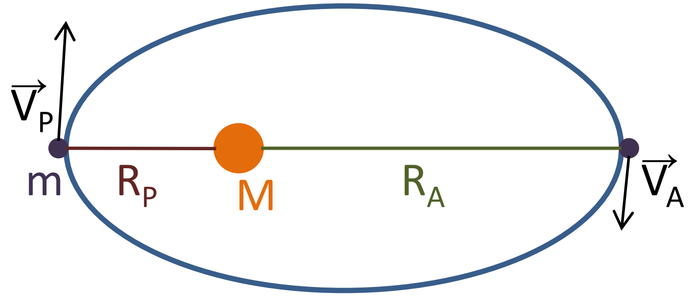
Otrzymujemy wzór na szukaną odległość a:

$$a = (U_k \sin\alpha + U_R)d/ U_k \cos\alpha$$
Dla $\alpha = 30^\circ$: $a = (\frac{1}{2}U_k + U_R)\, d\, /(\frac{\sqrt{3}}{2} U_k) = (U_k + 2U_R)d/(\sqrt{3} U_k)$

Zadanie 3.

Planeta o masie m porusza się po elipsie wokół nieruchomego Słońca, które znajduje się w jednym z ognisk tej elipsy. Najmniejsza odległość planety od Słońca wynosi R_P,

a największa R_A. Znajdź prędkość liniową planety w tych punktach. Masa słońca M.



Rozwiązanie:

Planetę traktujemy jako punkt materialny. Ponieważ ruch planety wokół Słońca możemy traktować jako ruch punktu materialnego w polu siły centralnej więc w tym przypadku będą spełnione zasada zachowania energii całkowitej planety oraz zasada zachowania momentu pędu planety.

Moment pędu planety w punkcie najbliższym Słońcu (peryhelium) wynosi:

$$\vec{J}_P = \vec{R}_P \times m\vec{V}_P$$

Ponieważ $\vec{V}_P \perp \vec{R}_P$ to $J_P = R_P * mV_P \sin\angle(\vec{R}_P, \vec{V}_P) = R_P mV_P \sin 90^\circ = R_P mV_P$

Podobnie moment pędu planety w punkcie położonym najdalej od Słońca (aphelium) wynosi:

$$\vec{J}_A = \vec{R}_A \times m\vec{V}_A$$

$$J_A = R_A mV_A$$

Z zasady zachowania momentu pędu wynika, że:

$$J_P = J_A$$

$$R_P mV_P = R_A mV_A$$

Stąd: $R_P V_P = R_A V_A$

Energia całkowita planety jest sumą jej energii kinetycznej ruchu postępowego oraz energii potencjalnej.

W peryhelium energia całkowita planety wynosi:

$$E_p = \underbrace{\frac{mV_p^2}{2}}_{\text{Energia kinetyczna}} + \underbrace{(-\frac{GMm}{R_p})}_{\text{Energia potencjalna}}$$

W powyższym wzorze G oznacza uniwersalną stałą grawitacji.

Podobnie w aphelium:

$$E_A = \frac{mV_A^2}{2} + (-\frac{GMm}{R_A})$$

Z zasady zachowania energii całkowitej mamy:

$$E_A = E_P$$

Stąd:

$$\frac{mV_A^2}{2} - \frac{GMm}{R_A} = \frac{mV_P^2}{2} - \frac{GMm}{R_P}$$

$$\frac{V_A^2}{2} - \frac{GM}{R_A} = \frac{V_P^2}{2} - \frac{GM}{R_P}$$

Korzystając z powyższych wzorów otrzymujemy układ z dwiema niewiadomymi V_A i V_P:

$$\begin{cases} R_P V_P = R_A V_A \\ \frac{V_A^2}{2} - \frac{GM}{R_A} = \frac{V_P^2}{2} - \frac{GM}{R_P} \end{cases}$$

Z równania pierwszego wyznaczamy V_A:

$$V_A = \frac{R_P}{R_A} V_P$$

I postawiamy do drugiego:

$$\frac{R_P^2}{2R_A^2} V_P^2 - \frac{GM}{R_A} = \frac{V_P^2}{2} - \frac{GM}{R_P}$$

$$\frac{R_P^2}{2R_A^2} V_P^2 - \frac{V_P^2}{2} = \frac{GM}{R_A} - \frac{GM}{R_P}$$

$$V_P^2 \left(\frac{R_P^2}{R_A^2} - 1 \right) = 2GM \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_P} \right)$$

$$V_P^2 \left(\frac{R_P^2 - R_A^2}{R_A^2} \right) = 2GM \left(\frac{R_P - R_A}{R_A R_P} \right)$$

$$V_P^2 = 2GM \left(\frac{R_P - R_A}{R_A R_P} \right) \frac{R_A^2}{R_P^2 - R_A^2}$$

$$V_P^2 = 2GM \frac{(R_P - R_A) R_A}{R_P (R_P - R_A)(R_P + R_A)}$$

$$V_P^2 = 2GM \frac{R_A}{R_P (R_P + R_A)}$$

Otrzymujemy prędkość w peryhelium: $V_P^2 = \sqrt{\frac{2GMR_A}{R_P(R_P+R_A)}}$

Podstawiając otrzymaną wielkość do wzoru $R_PV_P = R_AV_A$ otrzymujemy:

$$R_P\sqrt{\frac{2GMR_A}{R_P(R_P+R_A)}} = R_AV_A$$

Stąd:

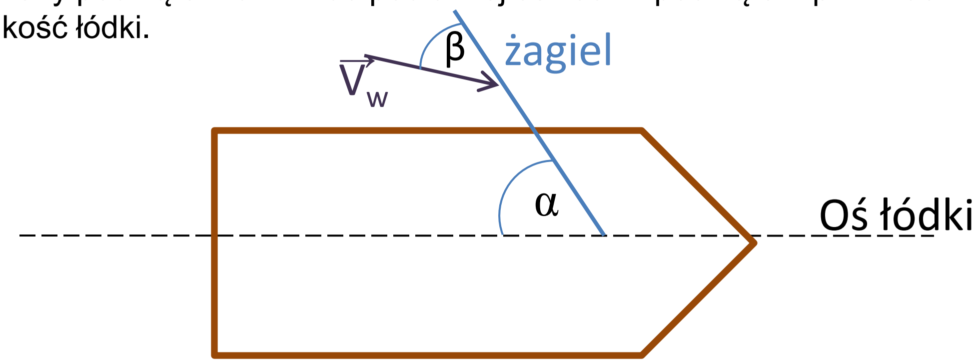
$$V_A = \frac{R_P}{R_A}\sqrt{\frac{2GMR_A}{R_P(R_P+R_A)}}$$

$$V_A = \sqrt{\frac{2GMR_AR_P^2}{R_A^2R_P(R_P+R_A)}}$$

Ostatecznie prędkość planety w aphelium: $V_A = \sqrt{\frac{2GMR_P}{R_A(R_P+R_A)}}$

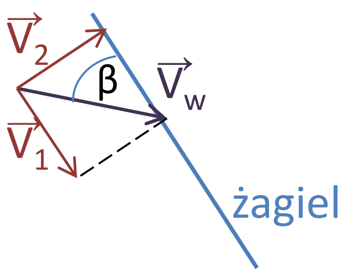
Zadanie 4.

Żagiel łódki został ustawiony pod kątem α=60˚ do podłużnej osi łódki i pod kątem β= 30˚do wiatru wiejącego z prędkością V_w = 6m/s. Znajdź prędkość łódki.



Rozwiązanie:

Rozkładamy prędkość wiatru V_w na składowe prostopadłą i równoległą do żagla:



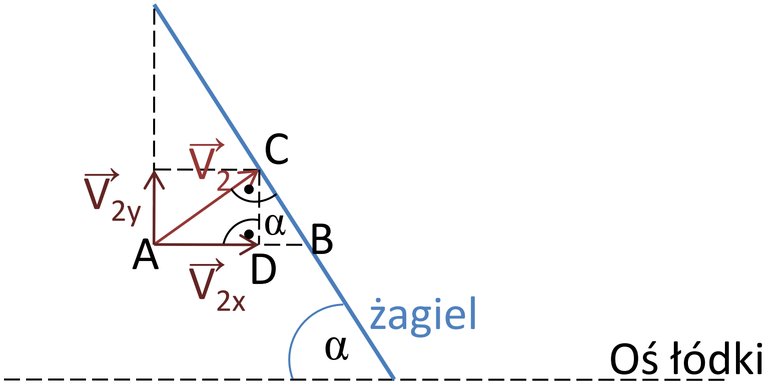
$V_2/V_w = \sin\beta$ stąd $V_2 = V_w\sin\beta$

$V_1/V_w = \cos\beta$ stąd $V_1 = V_w\cos\beta$

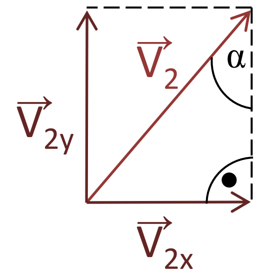
Nas interesować będzie składowa prostopadła do żagla:

$V_2 = V_w\sin\beta$

Rozłożymy teraz prędkość $\vec{V}_2$ na składowe równoległą $\vec{V}_{2x}$ i prostopadłą $\vec{V}_{2y}$ do osi łódki:



Trójkąt ABC i ADC są podobne. Kąt ACD jest przystający do kąta ABC



$V_{2x}/ V_2 = \sin\alpha$ stąd $V_{2x} = V_2 \sin\alpha$

$V_{2y}/ V_2 = \cos\alpha$ stąd $V_{2y} = V_2 \cos\alpha$

Łódka porusza się z prędkością V_{2x}.
Porównując uzyskane wzory otrzymujemy:

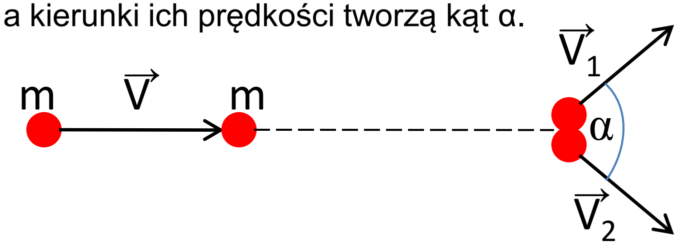
$$V_{2x} = V_2 \sin\alpha = V_w \sin\alpha \sin\beta$$

Uwzględniając dane występujące w zadaniu ostatecznie dostajemy:

$$V_{2x} = 6\frac{m}{s} \sin 60° \sin 30° = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{m}{s}$$

Zadanie 5.
Cząstka o masie m zderza się idealnie sprężyście z nieruchomą cząstką o takiej samej masie. Wykaż, że po zderzeniu cząstki rozbiegną się pod kątem 90˚.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że przed zderzeniem cząstka pierwsza początkowo ma prędkość V. Niech po zderzeniu cząstki mają prędkość V_1 i V_2, a kierunki ich prędkości tworzą kąt α.



Ponieważ jest to zderzenie idealnie sprężyste spełnione będą zasady zachowania pędu i energii.

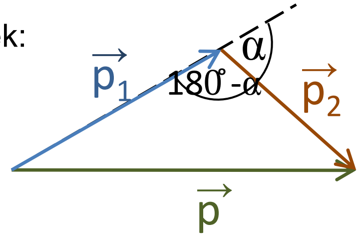
Zasada zachowania energii ma postać: $\frac{mV^2}{2} = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2}$

Natomiast zasada zachowania pędu wygląda następująco:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

Czyli: $m\vec{V} = m\,\vec{V}_1 + m\,\vec{V}_2$

Korzystając z tej zasady możemy narysować wektory pędów cząstek:



Z twierdzenia cosinusów dla tego trójkąta mamy:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos(180^\circ - \alpha)$$

Ze wzorów redukcyjnych: $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\alpha$

Podstawiając wzór na pęd: $\vec{p} = m\vec{V}$ mamy:

$$p_1 = mV_1$$
$$p_2 = mV_2$$

Stąd wcześniejszy wzór przyjmuje postać:

$$m^2V^2 = m^2V_1^2 + m^2V_2^2 + 2m^2V_1V_2\cos\alpha$$

Czyli: $mV^2 = mV_1^2 + mV_2^2 + 2mV_1V_2\cos\alpha$

Dzieląc przez 2 mamy:

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} + mV_1V_2cos\alpha$$

Z drugiej strony korzystając z zasady zachowania energii mamy:

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2}$$

Porównując dwa ostatnie wzory otrzymujemy:

$$\cos\alpha = 0$$

Czyli :

$$\alpha = 90^\circ$$

Zadanie 6.

Gwiazda o masie M_0, promieniu R_0 i okresie obrotu wokół własnej osi T_0 zaczyna sie kurczyć. Obliczyć okres obrotu T_K skurczonej gwiazdy, jeśli jej promień zmalał $n = 10^2$ razy.

Rozwiązanie:

Przyjmując, że gwiazda jest kulą o masie M_0 i promieniu R_0 jej moment bezwładności wyraża się wzorem: $I_0 = \frac{2}{5}M_0R_0^2$

Ponieważ masa pozostaje stała, to moment bezwładności skurczonej gwiazdy: $I_K = \frac{2}{5}M_0\,R_K^2$

Z zasady zachowania momentu pędu: $$\vec{J_0} = \vec{J_K}$$

Gdzie: $$J_K = I_K \omega_K \quad \text{i} \quad J_0 = I_0 \omega_0$$

ω_0 , ω_K – prędkości kątowe gwiazdy początkowej i skurczonej $$I_K \omega_K = I_0 \omega_0$$

Korzystając ze związku między prędkością kątową ω, a okresem T: $$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Mamy: $$\frac{2}{5} M_0\, R_0^2 \cdot \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2}{5} M_0\, R_K^2 \cdot \frac{2\pi}{T_K}$$

Stąd: $$\frac{R_0^2}{T_0} = \frac{R_K^2}{T_K}$$

Czyli: $$T_K = \frac{R_K^2}{R_0^2} T_0$$

Ponieważ promień gwiazdy zmalał n razy więc: $$R_K = \frac{R_0}{n}$$

Otrzymujemy: $$T_K = \frac{R_0^2}{n^2 R_0^2} T_0$$

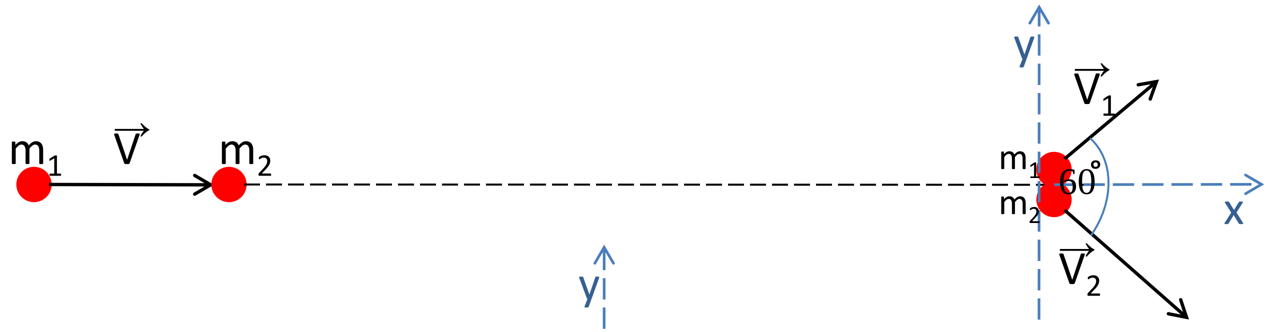
$$T_K = \frac{1}{n^2} T_0$$

Dla n= 10^2 mamy:

$$T_K = 10^{-4}\, T_0$$

Zadanie 7.
Poruszająca się cząstka o nieznanej masie m_1 zderza się doskonale sprężyście z nieruchomą cząstką także o nieznanej masie m_2. Po zderzeniu cząstki poruszają się symetrycznie względem pierwotnego kierunku cząstki m_1, w ten sposób, że kąt między ich kierunkami ruchu wynosi 60˚. Znajdź stosunek mas m_1/m_2 tych cząstek.

Rozwiązanie:
Załóżmy że cząstka o masie m_1 porusza się początkowo z prędkością $\vec{V}$ oraz że prędkości tych cząstek po zderzeniu wynoszą odpowiednio $\vec{V_1}$ i $\vec{V_2}$.

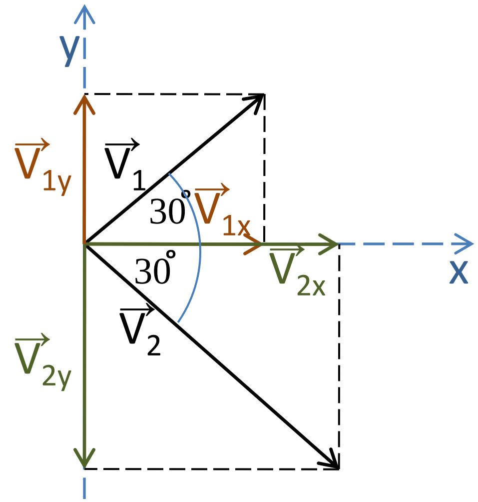


Rozłóżmy prędkości cząstek na składowe:

$$\vec{V} = [V, 0]$$

$$\vec{V_1} = [V_1 \cos 30°, V_1 sin30°] = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} V_1, \frac{1}{2} V_1\right]$$

$$\vec{V_2} = [V_2 \cos 30°, -V_2 sin30°] = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} V_2, -\frac{1}{2} V_2\right]$$



Ponieważ jest to zderzenie doskonale sprężyste spełnione są zasada zachowania pędu i zasada zachowania energii.

Zasada zachowania pędu: $\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$, czyli: $m_1\vec{V} = m_1\vec{V_1} + m_2\vec{V_2}$

Rozpisując na składowe:

W kierunku x: $$m_1 V = m_1 \frac{\sqrt{3}}{2} V_1 + m_2 \frac{\sqrt{3}}{2} V_2$$

y: $$0 = \frac{1}{2} m_1 V_1 - \frac{1}{2} m_2 V_2$$

Ze wzoru dla składowej y otrzymujemy:

$$m_1 V_1 = m_2 V_2$$

Stąd:

$$V_2 = \frac{m_1}{m_2} V_1 \qquad (*)$$

Podstawiając do wzoru dla składowej x mamy:

$$m_1 V = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 m_1 V_1$$

$$V = \sqrt{3} V_1 \qquad (**)$$

Zasada zachowania energii ma postać: $$\frac{m_1V^2}{2} = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2}$$

Wykorzystując zależności (*) i (**) mamy: $$m_1 3V_1^2 = m_1V_1^2 + m_2\frac{m_1^2}{m_2^2}V_1^2$$

$$2m_1V_1^2 = \frac{m_1^2}{m_2}V_1^2$$

Stąd ostatecznie: $$\frac{m_1}{m_2} = 2$$

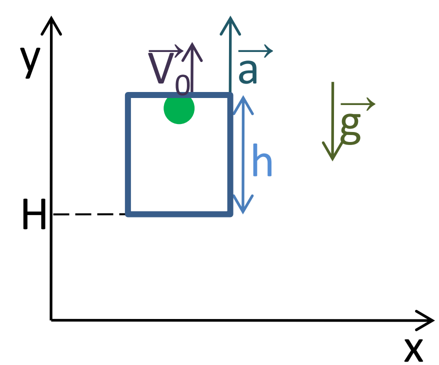
Zadanie 8.
Winda wznosi się do góry ze stałym przyspieszeniem a. W chwili, gdy podłoga windy znajduje sie na wysokości H z sufitu windy odrywa sie żarówka i spada na jej podłogę. Wiedząc, że winda ma wysokość h znajdź:
a) Prędkość windy w chwili, gdy żarówka zaczyna spadać
b) Czas po jakim żarówka spadnie z sufitu na podłogę

Rozwiązanie:
Szukamy prędkości jaką ma winda na wysokości H. Ponieważ wznosi się ona z przyspieszeniem i nie ma prędkości początkowej, na wysokości H znajdzie się po czasie t_0, który znajdujemy ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym: $$H = \frac{1}{2}at_0^2$$

Stąd: $$t_0 = \sqrt{\frac{2H}{a}}$$

Po upływie czasu t_0 winda uzyskuje prędkość: $$V_0 = at_0$$

$$V_0 = a\sqrt{\frac{2H}{a}} = \sqrt{2Ha}$$



Rozpatrzmy ruch windy i żarówki w układzie odniesienia związanym z ziemią:

Położenie podłogi windy w zależności od czasu możemy opisać następująco:

$$y_w = H + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Położenie żarówki w zależności od czasu: $$y_z = H + h + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Żarówka spadnie na podłogę w chwili, gdy współrzędne y podłogi i żarówki będą równe.

$$y_w = y_z$$

$$H + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = H + h + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Stąd: $$h = \frac{1}{2}(a+g) t^2$$

Czyli: $$t = \sqrt{\frac{2h}{a+g}}$$

Zadanie 9.

Balon wznosi sie do góry ze stałą prędkością V_B. Gdy osiągnął wysokość H nad ziemią, wyrzucono z niego worek ukośnie do góry pod kątem α= 30˚ do poziomu z prędkością V_p względem balonu.

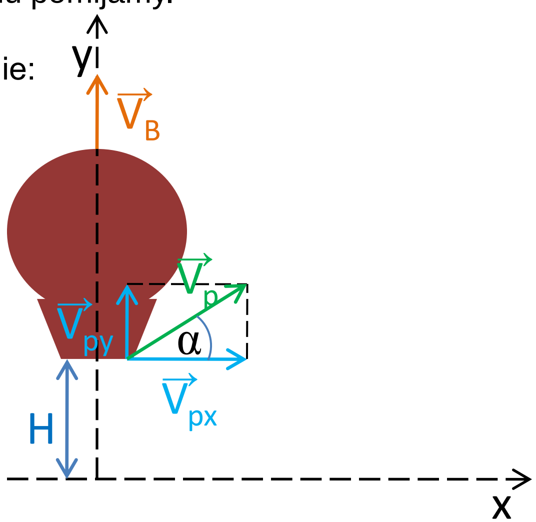
a) Po jakim czasie worek upadnie na ziemię?

b) W jakiej odległości upadnie(zasięg)?

c) Jaką prędkość będzie miał worek w chwili upadku?

Opory ruchu pomijamy.

Rozwiązanie:

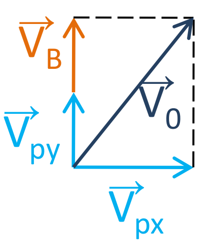


Rozkładamy prędkość $\vec{V}_p$ na składowe:

$V_{px} = V_p \cos\alpha$

$V_{py} = V_p \sin\alpha$

W chwili wyrzutu worek będzie miał względem ziemi prędkość $\vec{V}_0$ ze składowymi V_{px} i $V_B + V_{py}$.



a) Współrzędna y worka będzie zależna od czasu zgodnie ze wzorem:

$$y = H + (V_B + V_{py})t - \frac{1}{2}gt^2$$

W chwili uderzenia w ziemię y = 0
Czyli:

$$0 = H + (V_B + V_{py})t - \frac{1}{2}gt^2$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$\Delta = (V_B + V_{py})^2 + 2gH$$

$$t_1 = \frac{-(V_B+V_{py})+\sqrt{(V_B+V_{py})^2+2gH}}{-g} < 0$$

To rozwiązanie odrzucamy

$$t_2 = \frac{-(V_B+V_{py})-\sqrt{(V_B+V_{py})^2+2gH}}{-g}$$

$$= \frac{(V_B+V_{py})+\sqrt{(V_B+V_{py})^2+2gH}}{g} > 0$$

Otrzymaliśmy całkowity czas lotu, czyli czas, po którym worek uderzy o ziemię.

$$t_c = t_2 = \frac{1}{g}\left[(V_B+V_{py})+\sqrt{(V_B+V_{py})^2+2gH}\right] = \frac{1}{g}\left[(V_B+V_p sin\alpha)+\sqrt{(V_B+V_p sin\alpha)^2+2gH}\right]$$

Dla α= 30˚:

$$t_c = \frac{1}{g}\left[\left(V_B+\frac{1}{2}V_p\right)+\sqrt{\left(V_B+\frac{1}{2}V_p\right)^2+2gH}\right]$$

b) Odległość w jakiej worek upadnie znajdujemy z zależności: $x = V_{px} \cdot t_c$

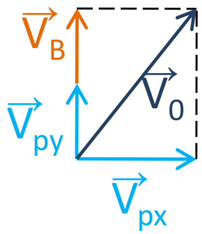
$$x = \frac{V_p cos\alpha}{g}\left[(V_B+V_p sin\alpha)+\sqrt{(V_B+V_p sin\alpha)^2+2gH}\right]$$

Dla α= 30˚:

$$x = \frac{\sqrt{3}V_p}{2g}\left[\left(V_B + \frac{1}{2}V_p\right) + \sqrt{\left(V_B + \frac{1}{2}V_p\right)^2 + 2gH}\right]$$

c) Prędkość końcową worka możemy znaleźć z zasady zachowania energii. W chwili wyrzutu worek ma względem ziemi prędkość:

$$V_0 = \sqrt{\left(V_B + V_{py}\right)^2 + V_{px}^2}$$



Jeśli przyjmiemy, że worek ma masę m, to jego energia mechaniczna na wysokości H wynosi:

$$E_H = mgH + \frac{1}{2}mV_0^2$$

W chwili uderzenia w ziemię worek ma tylko energię kinetyczną.

$$E_Z = \frac{1}{2}mV_K^2$$

gdzie V_K jest szukaną prędkością końcową worka

Z zasady zachowania energii:

$$E_Z = E_H$$

Czyli:

$$mgH + \frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}mV_K^2$$

Zatem:

$$V_K = \sqrt{{V_0}^2 + 2gH}$$

Podstawiając V_0 otrzymujemy ostatecznie:

$$V_K = \sqrt{\left(V_B + V_{py}\right)^2 + V_{px}^2 + 2gH} = \sqrt{\left(V_B + V_p sin\alpha\right)^2 + V_p^2 cos^2\alpha + 2gH}$$

Dla α= 30˚:

$$V_K = \sqrt{\left(V_B + \frac{1}{2}V_p\right)^2 + \frac{3}{4}V_p^2 + 2gH}$$

$$= \sqrt{V_B^2 + V_p^2 + V_B V_p + 2gH}$$

Zadanie 10.
Dwie identyczne bryłki lodu o masie m każda i temperaturze -20℃ zbliżają sie do siebie z takimi samymi prędkościami. Jaką wartość ma ta prędkość, jeśli podczas niesprężystego zderzenia bryłki wyparują. Zaniedbać straty na promieniowanie.

Rozwiązanie:
Każda z bryłek ma energię kinetyczną: $E_{KB} = \frac{1}{2}mV^2$

Zmiana energii kinetycznej układu podczas zderzenia:

$$\Delta E_K = 2E_{KB} - 0 = 2E_{KB} = mV^2$$

Kosztem energii kinetycznej następuje wzrost energii wewnętrznej układu i możliwa jest zmiana stanu skupienia:

$$\Delta E_K = 2mc_L\Delta t_L + 2mL + 2mc_W\Delta t_W + 2mR$$

Gdzie: c_L- ciepło właściwe lodu
c_W- ciepło właściwe wody
L- ciepło topnienia lodu
R- ciepło parowania wody

Stąd:

$$mV^2 = 2m(c_L\Delta t_L + L + c_W\Delta t_W + R)$$

Gdzie:

$$\Delta t_L = 0°\mathrm{C} - (-20°\mathrm{C}) = 20°\mathrm{C}$$
$$\Delta t_W = 100°\mathrm{C} - 0°\mathrm{C} = 100°\mathrm{C}$$

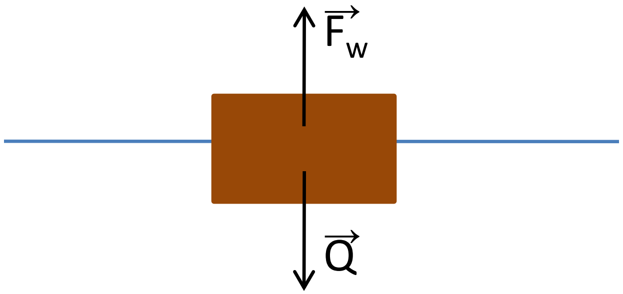
Ostatecznie:

$$V = \sqrt{2(c_L\Delta t_L + L + c_W\Delta t_W + R)}$$

Zadanie 11.

Drewniany klocek o masie 0,3kg pływa częściowo zanurzony w wodzie. Jaką siłą należy działać na klocek, aby całkowicie się zanurzył. Gęstość drewna ρ_d= 600 kg/m^3, gęstość wody ρ_w= 1000 kg/m^3, g= 9,81 m/s^2.

Rozwiązanie:



Siła wyporu $\vec{F}_w$ równoważy ciężar klocka $\vec{Q}$.

$$F_w = Q$$

Siła wyporu:

$$F_w = \rho_w V_z\, g$$

Gdzie V_z- objętość zanurzonej części klocka

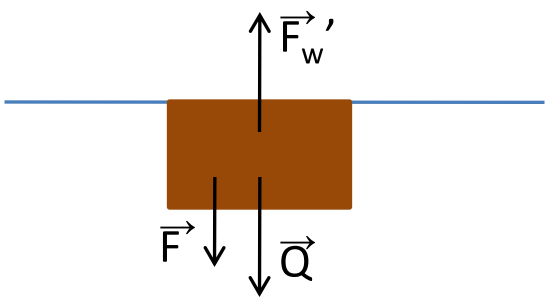
Ciężar klocka:

$$Q = mg = \rho_d V g$$

Gdzie V- objętość całego klocka

Aby klocek zanurzył się całkowicie, musimy działać siłą $\vec{F}$. Wówczas nowa siła wyporu będzie równoważyć ciężar i przyłożoną siłę.

$$F_w' = F + Q$$



Stąd:

$$F = F_w' - Q$$

Gdzie:

$$F_w' = \rho_w V g$$

$$F = \rho_w V g - \rho_d V g = (\rho_w - \rho_d) V g$$

ponieważ m = ρ_d V to:

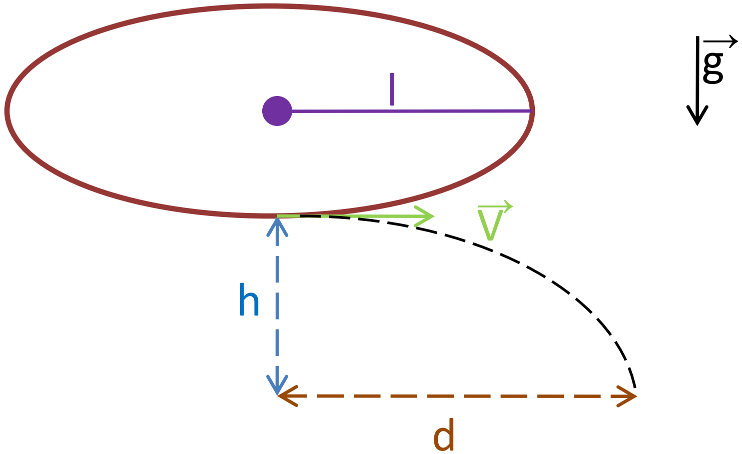
$$F = (\rho_w - \rho_d)\,\frac{m}{\rho_d}\, g = mg\left(\frac{\rho_w}{\rho_d} - 1\right)$$

Podstawiając dane:

$$F = 0{,}3 \cdot 9{,}81\left(\frac{1000}{600} - 1\right) \approx 1{,}96[N]$$

Zadanie 12.
Kamień uwiązany na sznurku o długości l= ½ m zatacza okrąg w płaszczyźnie poziomej na wysokości h= 1m nad ziemią. W pewnej chwili sznurek ulega zerwaniu i kamień zostaje wyrzucony poziomo, uderzając w ziemię w odległości d= 2m. Znajdź przyspieszenie dośrodkowe kamienia podczas ruchu obrotowego.

Rozwiązanie:
Kamień porusza się po okręgu o promieniu l.



Ruch kamienia po zerwaniu sznurka możemy traktować jako rzut poziomy z wysokości h z prędkością początkową V.
Czas spadku znajdziemy ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

Stąd: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Podstawiając otrzymany czas do wzoru na drogę w ruchu jednostajnym mamy:

$$d = V \cdot t = V\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Z powyższego wzoru znajdujemy prędkość, jaką miał kamień podczas ruchu obrotowego.

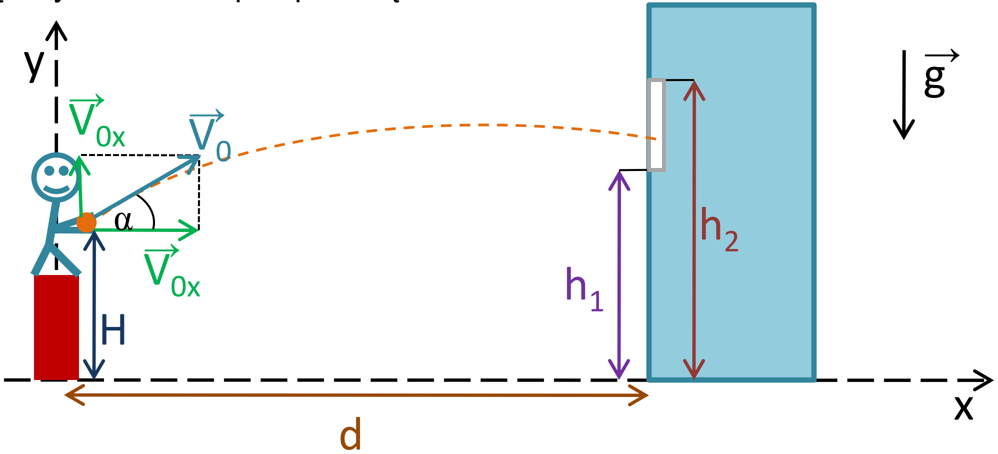
$$V = \frac{d}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = d\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

Stąd przyspieszenie dośrodkowe: $a_d = \frac{V^2}{l} = \frac{d^2\frac{g}{2h}}{l} = \frac{d^2 g}{2hl}$

Podstawiając dane i przyjmując g= 9,81 m/s²: $a_d = \frac{4 \cdot 9{,}81}{2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}} = 39{,}24 \left[\frac{m}{s^2}\right]$

Zadanie 13.
Mały chłopiec stojąc na murku o wysokości H rzucił piłkę pod kątem α=60˚ do poziomu. Jaką prędkość powinien nadać piłce, aby wpadła przez okno do domu znajdującego sie w odległości d od murka. Krawędzie dolna i górna okna znajdują sie odpowiednio na wysokości h_1 i h_2 nad ziemią. Wysokość chłopca pominąć.

Rozwiązanie:



Rozłóżmy prędkość $\vec{V}_0$ na składowe:

$$V_{0x} = V_0 cos\alpha = V_0 cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2} V_0$$
$$V_{0y} = V_0 sin\alpha = V_0 sin30° = \frac{1}{2} V_0$$

W kierunku x mamy do czynienia z ruchem jednostajnym z prędkością V_{0x}. $x = V_{0x} \cdot t$

W kierunku y obserwujemy ruch jednostajnie zmienny: $y = H + V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$

W odległości d piłka znajdzie się po upływie czasu: $t = \frac{d}{V_{0x}}$

Wówczas będzie na wysokości nad ziemią: $y = H + V_{0y} \frac{d}{V_{0x}} - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{V_{0x}^2}$

$$y = H + d \cdot tg\alpha - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{V_{0x}^2} = H + d\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{d^2}{\frac{3}{4} V_o^2} = H + d\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} g \cdot \frac{d^2}{V_o^2}$$

Z warunków zadania:

$$h_1 < y < h_2$$
$$h_1 < H + d\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} g \cdot \frac{d^2}{V_o^2} < h_2$$
$$h_1 - H - \frac{\sqrt{3}}{3} d < -\frac{2}{3} g \cdot \frac{d^2}{V_o^2} < h_2 - H - \frac{\sqrt{3}}{3} d$$

$$-\frac{3}{2gd^2}\left(h_1 - H - \frac{\sqrt{3}}{3}d\right) > \frac{1}{V_o^2} > -\frac{3}{2gd^2}\left(h_2 - H - \frac{\sqrt{3}}{3}d\right)$$

$$\frac{3}{2gd^2}\left(H + \frac{\sqrt{3}}{3}d - h_1\right) > \frac{1}{V_o^2} > \frac{3}{2gd^2}\left(H + \frac{\sqrt{3}}{3}d - h_2\right)$$

$$\frac{2gd^2}{3\left(H + \frac{\sqrt{3}}{3}d - h_2\right)} > V_o^2 > \frac{2gd^2}{3\left(H + \frac{\sqrt{3}}{3}d - h_1\right)}$$

Ostatecznie:

$$\sqrt{\frac{2gd^2}{3\left(H + \frac{\sqrt{3}}{3}d - h_2\right)}} > V_o > \sqrt{\frac{2gd^2}{3\left(H + \frac{\sqrt{3}}{3}d - h_1\right)}}$$

Warunek:

$$H + \frac{\sqrt{3}}{3}d > h_2$$

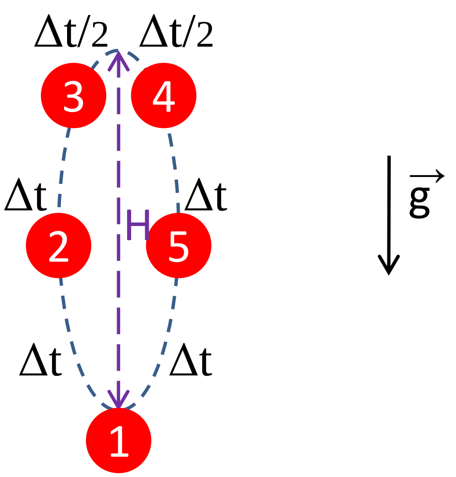
$$H + \frac{\sqrt{3}}{3}d > h_1$$

Zadanie 14.

Żonglerowi udaje sie utrzymać 5 piłeczek w ciągłym ruchu podrzucając je jedną ręką na wysokość H= 4m. Znajdź:

a) Przedział czasu między kolejnymi podrzutami piłek

b) Położenie pozostałych piłek w chwili, gdy jedna z nich jest w ręku żonglera



Rozwiązanie:

Δt – przedział czasu między kolejnymi podrzutami

a) Z rysunku wynika, że czas lotu na maksymalną wysokość H wynosi 2½Δt. Tyle samo wynosi czas spadku swobodnego z wysokości H. Ze wzoru na drogę dla ruchu jednostajnie przyspieszonego: $H = \frac{1}{2}gt^2$

Podstawiając:

$$t = 2\frac{1}{2}\Delta t$$

Otrzymujemy:

$$\Delta t^2 = \frac{4}{25} \cdot \frac{2H}{g}$$

Stąd:

$$\Delta t = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Podstawiając dane i przyjmując g = 9,81 m/s^2: $\Delta t = 0{,}36\ s$

b) Jeśli piłka nr 1 jest na dole, to piłki nr 3 i 4 są na tej samej wysokości h_1.

$$h_1 = H - \frac{1}{2} g \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 = H - \frac{1}{8} g\, (\Delta t)^2$$

Podstawiając:

$$h_1 = 3{,}84\ m$$

Piłka nr 2 i nr 5 znajdują sie na wysokości h_2.

$$h_2 = H - \frac{1}{2} g \left(\frac{3}{2}\Delta t\right)^2 = H - \frac{9}{8} g\, (\Delta t)^2$$

Podstawiając:

$$h_2 = 2{,}57\ m$$

Zadanie 15.

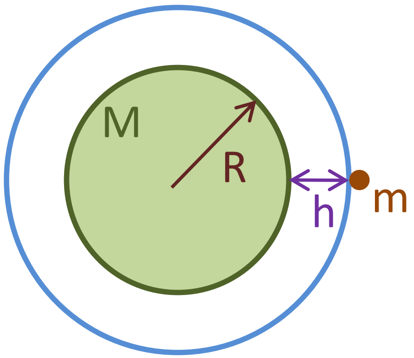
Na wysokości h= 3000km nad powierzchnią Ziemi porusza się po orbicie kołowej satelita o masie m. Znajdź:

a) Wartość prędkości liniowej satelity

b) Okres obiegu satelity wokół Ziemi

Promień Ziemi R= 6378,245 km

Przyspieszenie ziemskie g= 9,81 m/s^2



Rozwiązanie:

a)

Siła grawitacji działająca na satelitę wyraża sie wzorem:

$$F_g = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$

gdzie: M – masa Ziemi

G – stała grawitacji

Siła grawitacji spełnia rolę siły dośrodkowej: $F_d = \frac{mV^2}{R+h}$

Gdzie: V – szukana prędkość liniowa satelity

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2} = \frac{mV^2}{R+h}$$

Stąd:

$$V = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

Ponieważ: $g = \frac{GM}{R^2}$, to $GM = gR^2$

Wstawiając do wzoru na V otrzymujemy ostatecznie:

$$V = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} = R\sqrt{\frac{g}{R+h}} \approx 6535{,}8\frac{m}{s}$$

b) Ponieważ satelita porusza się po okręgu o promieniu (R+h):

$$V = \frac{2\pi(R+h)}{T}$$

Stąd: $T = \frac{2\pi(R+h)}{V} \approx 9011s$

Zadanie 16.

Bryłkę lodu o masie m i temperaturze t_L= -15℃ rzucono poziomo z wysokości H= 100m. Jaką prędkość początkową nadano tej bryłce, jeżeli przy uderzeniu w ziemię całkowicie się stopiła?

Ciepło właściwe lodu: c_L = 2100 J/kg K

Ciepło topnienia lodu: L = 355 000 J/kg

Rozwiązanie:

Zakładamy, że cała energia mechaniczna bryłki lodu przy uderzeniu w ziemię, zamienia sie na energię cieplną.

$$E = Q$$

Energia mechaniczna lodu w momencie wyrzutu wynosi:

$$E = E_{kinetyczna} + E_{potencjalna} = \frac{1}{2}mV_0^2 + mgH$$

Ciepło potrzebne do stopienia bryłki lodu:

$$Q = Q_L + Q_T$$

Gdzie Q_L – ciepło potrzebne do ogrzania lodu od temperatury -15℃ do 0℃

$$Q_L = mc_L\Delta T \qquad \begin{cases} \Delta t = \big(0°C - (-15°C)\big) = 15°C \\ \Delta T = 15K \end{cases}$$

Q_T – ciepło potrzebne do stopienia bryłki lodu

$$Q_T = mL$$

Stąd: $$\frac{1}{2}mV_0^2 + mgH = mc_L\Delta T + mL$$

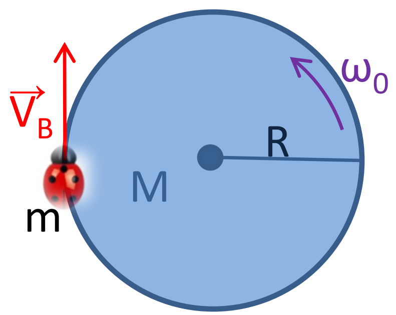
Ostatecznie: $$V_0 = \sqrt{2(c_L\Delta T + L - gH)}$$

Podstawiając dane: $$V_0 \approx 878\,\frac{m}{s}$$

Zadanie 17.
Talerz o masie M i promieniu R obraca sie wokół osi prostopadłej do niego i przechodzącej przez jego środek. Talerz obraca się z prędkością kątową ω_0 przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Wzdłuż krawędzi talerza porusza się biedronka o masie m z prędkością V_B względem ziemi, zgodnie z ruchem wskazówek zegara. W pewnej chwili biedronka przechodzi ku środkowi talerza na odległość ½R, zmienia kierunek swojej prędkości i zaczyna poruszać się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara wokół środka talerza z prędkością 2 razy większą niż początkowo. Znajdź końcową prędkość kątową tego talerza. Rozmiary biedronki zaniedbać.

Rozwiązanie:
Moment bezwładności talerza: $$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Sytuacja początkowa:



Zadanie rozwiązujemy w układzie odniesienia związanym z ziemią.

Moment pędu układu: $$\vec{J_0} = \overrightarrow{J_{0B}} + \overrightarrow{J_{0T}}$$

gdzie: $\overrightarrow{J_{0B}}$ - początkowy moment pędu biedronki
$\overrightarrow{J_{0T}}$ - początkowy moment pędu talerza

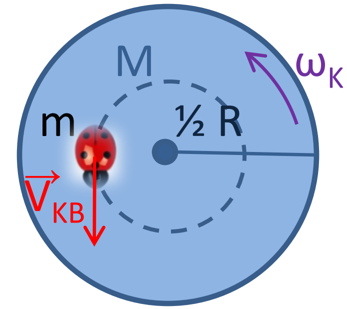
Ponieważ zwroty momentów pędu są przeciwne: $J_0 = J_{0T} - J_{0B}$
($\overrightarrow{J_{0T}}$ do nas, $\overrightarrow{J_{0B}}$ od nas)
Uwzględniając: $J_{0T} = I\omega_0$
$J_{0B} = mRV_B$ (ponieważ: $\overrightarrow{J_{0B}} = \vec{R} \times m\overrightarrow{V_B}$ i $\overrightarrow{V_B} \perp \vec{R}$)

Mamy: $J_0 = I\omega_0 - mRV_B$

$$\overrightarrow{J_K} = \overrightarrow{J_{KT}} + \overrightarrow{J_{KB}}$$

gdzie: J_{KT} - końcowy moment pędu talerza
J_{KB} - końcowy moment pędu biedronki

Sytuacja końcowa:



Tym razem zwroty momentów pędu talerza i biedronki są jednakowe, stąd: $J_K = J_{KT} + J_{KB}$

Ponieważ: $J_K = I\omega_K$, gdzie ω_K – końcowa prędkość kątowa talerza

$$J_{KB} = \frac{1}{2} R m V_{KB}$$

Korzystając z zasady zachowania momentu pędu dla układu talerz-biedronka: $\overrightarrow{J_0} = \overrightarrow{J_K}$

Mamy: $$I\omega_0 - mRV_B = I\omega_K + \frac{1}{2} RmV_{KB}$$

Biorąc pod uwagę, że $V_{KB} = 2V_B$ i $I = \frac{1}{2}MR^2$ otrzymujemy prędkość końcową talerza:

$$\omega_K = \frac{I\omega_0 - 2RmV_B}{I} = \omega_0 - 4\frac{mV_B}{MR}$$

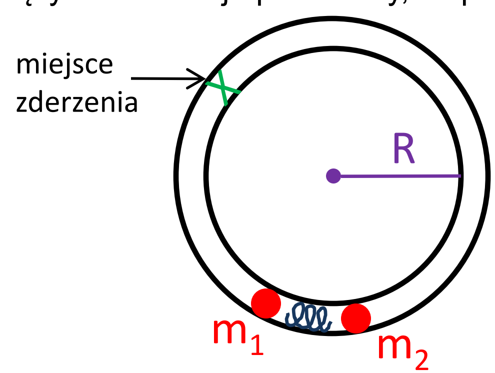
Jeśli $\omega_0 < 4\frac{mV_B}{MR}$ wówczas talerz zacznie się obracać w przeciwną stronę, czyli zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Zadanie 18.

Na poziomym kołowym torze o promieniu R leżą dwie małe kulki o masach m_1 i m_2 połączone sznurkiem. Między kulkami znajduje się sprężyna i długości spoczynkowej l_0 i współczynniku sprężystości k. Sprężyna, która nie jest przymocowana do kulek, została ściśnięta osiągając długość l. W pewnej chwili sznurek łączący kulki zostaje przerwany, a sprężyna odrzuca kulki w przeciwnych kierunkach. Znajdź:

a) Miejsce zderzenia kulek
b) Czas, po którym nastąpi zderzenie

Tarcie, masę sprężyny i rozmiary kulek zaniedbać.
Rozmiary sprężyny w porównaniu z długością toru są bardzo małe.



Energia potencjalna ściśniętej sprężyny: $$E_p = \frac{k\,(\Delta x)^2}{2} = \frac{k(l_0-l)^2}{2}$$

Z zasady zachowania energii: $$E_p = E_{kinetyczna1} + E_{kinetyczna2} = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} \qquad (*)$$

Z zasady zachowania pędu: $$0 = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}$$
$$0 = p_1 - p_2$$

Stąd: $$m_1V_1 = m_2V_2 \qquad (**)$$

a) Z równania (**) otrzymujemy: $$V_1 = \frac{m_2}{m_1}V_2 \qquad (***)$$

Kulki zderzą się gdy suma dróg przebytych przez nie w tym samym czasie jest równa długości okręgu.
$$s_1 + s_2 = 2\pi R$$

Z zależności (***) mamy: $$s_1 = \frac{m_2}{m_1}s_2$$

Stąd: $$s_2 + \frac{m_2}{m_1}s_2 = 2\pi R$$

Czyli zderzenie będzie miało miejsce w chwili, gdy kulka m_2 przebędzie drogę:
$$s_2 = \frac{2\pi R}{1+\frac{m_2}{m_1}} = \frac{2\pi R\, m_1}{m_1+m_2}$$

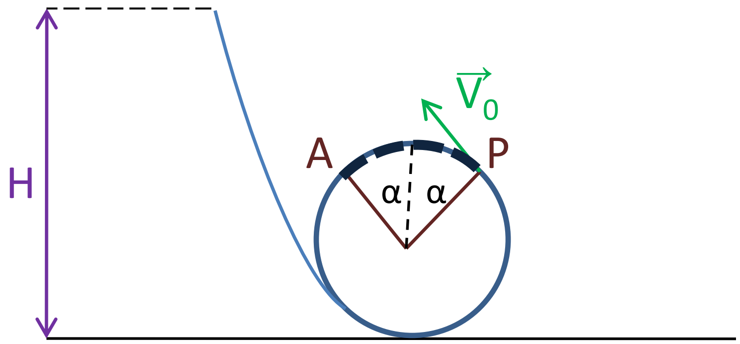
b) Czas spotkania znajdziemy, gdy obliczymy prędkości kulek przed zderzeniem.
Ze wzorów (*) i (***) mamy:
$$2E_p = m_1\frac{m_2^2}{m_1^2}V_2^2 + m_2V_2^2 = m_2V_2^2\left(\frac{m_2}{m_1}+1\right) = m_2V_2^2\,\frac{m_2+m_1}{m_1}$$

Stąd: $$V_2^2 = \frac{2E_p m_1}{m_2(m_1+m_2)}$$

Korzystając z wyniku na s_2: $$t = \frac{s_2}{V_2} = \frac{2\pi R\, m_1}{m_1+m_2}\cdot\sqrt{\frac{m_2(m_1+m_2)}{2E_p m_1}}$$

Podstawiając wzór na E_p otrzymujemy czas, po którym nastąpi zderzenie: $$t = \frac{2\pi R}{(l_0-l)}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)k}}$$

Zadanie 19.
Niewielkie ciało ześlizguje się z „martwej pętli”. Na szczycie pętli znajduje sie symetryczna wyrwa o kącie 2α. Znajdź minimalną i maksymalną wysokość H, przy których ciało odrywające sie od toru w punkcie P trafi ponownie na tor w punkcie A po przebyciu drogi w powietrzu. Określ odpowiadające tym wysokościom dopuszczalne kąty α.

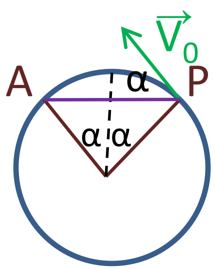


Rozwiązanie:
Wysokość na jakiej znajduje się punkt P: $h = R + Rcos\alpha = R\,(1 + cos\alpha)$

Za zasady zachowania energii mechanicznej mamy:

$$mgH = mgR\,(1 + cos\alpha) + \frac{mV_0^2}{2} \quad (*)$$

Gdzie: m – masa ciała
V_0 – prędkość ciała w punkcie P
Ciało A zachowuje sie tak, jakby było rzucone ukośnie z prędkością początkową V_0 pod kątem α do poziomu.



Wobec czego może przebyć odległość równą zasięgowi w rzucie ukośnym $z = \frac{V_0^2 sin2\alpha}{g}$

Z drugiej strony IAPI= 2Rsinα
Porównując oba powyższe wzory otrzymujemy: $\frac{V_0^2 sin\alpha cos\alpha}{g} = 2Rsin\alpha$

Czyli: $V_0^2 = \frac{gR}{cos\alpha}$

Wstawiając do wzoru (*) mamy: $H = R(1 + cos\alpha) + \frac{R}{2cos\alpha}$

Otrzymujemy równanie na cosα: $2Rcos^2\alpha + 2cos\alpha(R - H) + R = 0$

Rozwiązanie jest postaci: $cos\alpha = \frac{(H-R)\pm\sqrt{(H-R)^2-2R^2}}{2R}$

Oczywiście musi być spełniony warunek: $(H - R)^2 - 2R^2 \geq 0$

Czyli:

$$H - R \geq \sqrt{2}R$$

$$H \geq \left(\sqrt{2} + 1\right)R \qquad (**)$$

Musimy również uwzględnić, że: $0 < cos\alpha \leq 1$

Stąd:

$$\frac{H-R+\sqrt{(H-R)^2-2R^2}}{2R} \leq 1$$

$$H + \sqrt{(H-R)^2 - 2R^2} \leq 3R$$

$$\sqrt{(H-R)^2 - 2R^2} \leq 3R - H$$

Oraz:

$$(H - R)^2 - 2R^2 \leq (3R - H)^2$$

$$4H \leq 10R$$

Otrzymujemy drugi warunek na H: $H \leq 2{,}5R$

Uwzględniając związki (**) i (***) możemy określić możliwą wysokość H:

$$\left(\sqrt{2} + 1\right)R \leq H \leq 2{,}5R$$

Graniczne wartości kosinusów:

1° dla $H = \left(\sqrt{2} + 1\right)R$

$$cos\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha_1 = 45^\circ$$

2° dla $H = 2{,}5R$

$$cos\alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$ odrzucamy, gdyż wtedy nie ma wycięcia w pętli

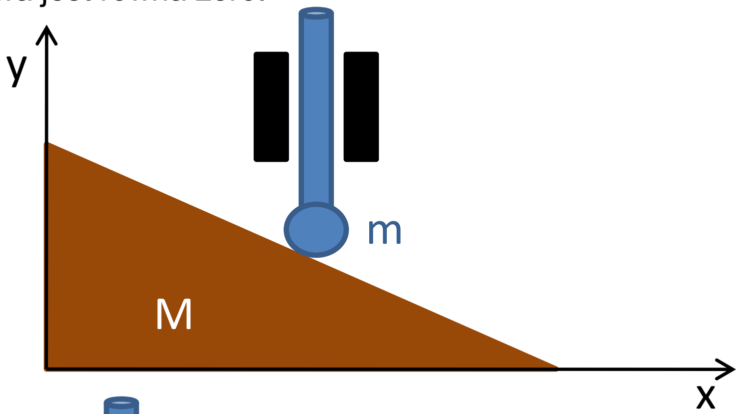
Lub:

$$cos\alpha_3 = 0{,}5 \Rightarrow \alpha_3 = 60^\circ$$

Ostatecznie: $45^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$

Zadanie 20.

O równie pochyłą, która może poruszać się bez tarcia po poziomej powierzchni, opiera się pręt o masie m. Ruch pręta jest ograniczony tylko do pionowej osi. Znajdź przyspieszenie pręta i równi oraz siłę reakcji równi. Masa równi M, kąt nachylenia α. Tarcie zaniedbać. Prędkość początkowa jest równa zero.



Rozwiązanie:

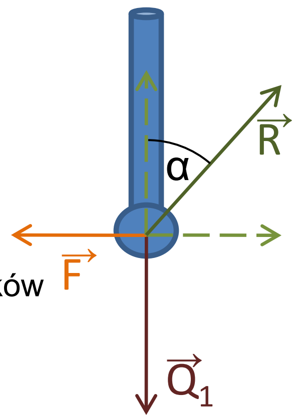
I sposób:

Siły działające na pręt:

Q_1 – siła ciężkości

R – siła reakcji ze strony równi

F – siła reakcji ze strony ograniczników

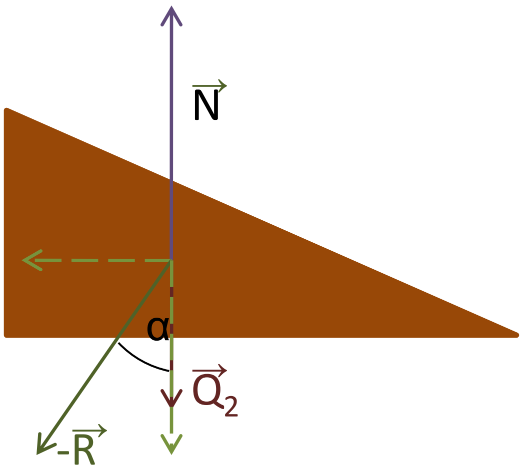


Siły działające na równię:

Q_2 – siła ciężkości

- R – siła reakcji ze strony pręta

N – siła reakcji ze strony stołu



Dla pręta równanie ruchu wzdłuż osi y (tylko tak się może poruszać):

$$ma_y = Q_1 - R\cos\alpha$$

$$ma_y = mg - R\cos\alpha \quad (1)$$

Dla równi równanie ruchu wzdłuż osi x (tylko tak się porusza):

$$Ma_x = R\sin\alpha \quad (2)$$

Pręt i równia poruszają się jednocześnie, więc:

$$\Delta y = \operatorname{tg}\alpha\, \Delta x \quad (*)$$

gdzie Δy i Δx przemieszczenia odpowiednio pręta i równi

Oba ciała poruszają się z różnymi przyspieszeniami.

$$\Delta y = \tfrac{1}{2} a_y t^2 \quad (**)$$

$$\Delta x = \tfrac{1}{2} a_x t^2 \quad (**)$$

Porównując wzory (*) i (**) otrzymujemy:

$$a_y = a_x tg\alpha \quad (3)$$

Rozwiązując układ (1), (2) i (3) z trzema niewiadomymi: a_x, a_y i R

$$\begin{cases} ma_y = mg - R\cos\alpha \\ Ma_x = R\sin\alpha \\ a_y = a_x tg\alpha \end{cases}$$

Otrzymujemy:

$$a_x = \frac{mg\, tg\alpha}{mtg^2\alpha + M}$$

$$a_y = \frac{mg\, tg^2\alpha}{mtg^2\alpha + M}$$

$$R = \frac{mMg\, cos\alpha}{Mcos^2\alpha + msin^2\alpha}$$

II sposób:

$$\Delta y = tg\alpha\, \Delta x \quad (*)$$

Gdzie Δy – przemieszczenie pręta

Δx – przemieszczenie równi

$$\Delta x = \tfrac{1}{2} a_x t^2 \quad i \quad V_x = a_x t \quad (***)$$

$$\Delta y = \tfrac{1}{2} a_y t^2 \quad i \quad V_y = a_y t \quad (***)$$

Z zasady zachowania energii widzimy, że pręt obniżając się traci energię potencjalną, która zamienia się w energię kinetyczną pręta i równi:

$$mg\Delta y = \frac{mV_y^2}{2} + \frac{mV_x^2}{2}$$

Uwzględniając wzory (*) i (***) mamy:

$$mga_y = ma_y^2 + Ma_x^2$$

$$a_y = a_x tg\alpha$$

Stąd:

$$mga_x tg\alpha = a_x^2(mtg^2\alpha + M)$$

Czyli:

$$a_x = \frac{mg\, tg\alpha}{mtg^2\alpha + M}$$

Oraz:

$$a_y = \frac{mg\, tg^2\alpha}{mtg^2\alpha + M}$$

Siłę reakcji równi znajdujemy z zależności: $Ma_x = R\sin\alpha$

Ostatecznie:

$$R = \frac{mMg\, cos\alpha}{Mcos^2\alpha + msin^2\alpha}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Żagiel ustawiony został prostopadle do osi podłużnej łódki i pod kątem α= 60˚ do kierunku wiatru. Jaką prędkość uzyska łódka pod wpływem wiatru wiejącego z prędkością V_w = 5 m/s? **(Odp.:** $\mathbf{V = V_w\, sin\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{2}\frac{m}{s}}$ **)**

2. Balon wznosi się do góry ze stałą prędkością V_B. W chwili ,gdy balon znajdował sie na wysokości H oderwał się od niego mały ciężki worek. Ile czasu worek będzie spadać na ziemię? Z jaką prędkością uderzy w ziemię? **(Odp.:** $\mathbf{t = \frac{V_B + \sqrt{2H + V_B^2}}{g}}$ $\quad V_K = \sqrt{\mathbf{2H + V_B^2}}$ **)**

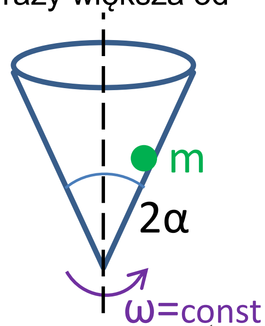
3. Jaką prędkość początkową należy nadać klockowi zsuwającemu sie z równi pochyłej o wysokości h i kącie nachylenia do poziomu α= 60˚, aby znalazł się u podstawy równi jednocześnie z cegłą spadającą swobodnie z tej wysokości. Tarcie zaniedbać. **(Odp.:** $\mathbf{V_0 = \frac{cos^2\alpha\sqrt{2gh}}{2sin\alpha} = \frac{\sqrt{6gh}}{12}}$ **)**

4. Klocek zsuwający się bez tarcia wzdłuż równi pochyłej o wysokości h nachylonej do poziomu pod kątem α= 60˚ uzyskuje przy podstawie prędkość n= 3 razy większą od prędkości tego samego klocka, zsuwającego się z tej samej wysokości h, gdy występuje tarcie. Oblicz współczynnik tarcia.**(Odp.:** $\mathbf{f = \frac{n^2-1}{n^2} tg\alpha = \frac{8\sqrt{3}}{27}}$ **)**

5. Z okna znajdującego się na wysokości H= 20m nad ziemią rzucono poziomo piłkę nadając jej prędkość V_0 = 10 m/s. Na jakiej wysokości piłka trafiła w pionowy mur znajdujący się w odległości d= 15m. **(Odp.:** $\mathbf{h = H - \frac{gd^2}{2V_0^2} \approx 9m}$ **)**

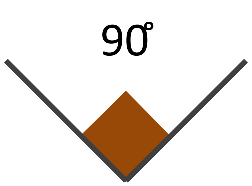
6. Chłopiec o masie m= 60kg stojąc na wadze sprężynowej odbija się od niej, aby skoczyć w górę. Jaką średnią siłę wskaże waga, jeśli chłopiec podskoczy na wysokość h= 0,5m, a czas trwania odbicia wyniesie Δt= 0,3s? **(Odp.:** $\mathbf{F_{śr} = m\left(g + \frac{\sqrt{2gh}}{\Delta t}\right) \approx 1214\ N}$ **)**

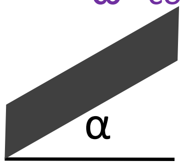
7. Punkt materialny porusza się po okręgu o promieniu R= 0,5m. Przyspieszenie styczne tego punktu jest stałe i wynosi a_s= 0,02m/s². Po jakim czasie od momentu rozpoczęcia ruchu wartość przyspieszenia dośrodkowego będzie 4razy większa od przyspieszenia stycznego? **(Odp.:** $\mathbf{t = \sqrt{\frac{4R}{a_s}} = 10\ s}$ **)**



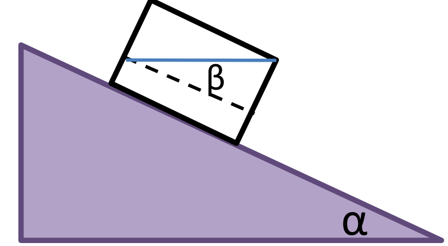
8. Stożek o kącie wierzchołkowym 2α= 60˚ obraca się wokół pionowej osi z prędkością kątową ω= 10 rad/s. Wewnątrz stożka znajduje się małe ciało o masie m. W jakim przedziale wartości musi być zawarta odległość tego ciała od wierzchołka stożka, aby ciało pozostawało nieruchome względem niego? Współczynnik tarcia wynosi f. **(Odp.:** $x_{min} = \frac{cos\alpha - fsin\alpha}{\omega^2(sin\alpha + fcos\alpha)sin\alpha}$, $x_{max} = \frac{cos\alpha + fsin\alpha}{\omega^2(sin\alpha - fcos\alpha)sin\alpha}$, $x_{min} < x < x_{max}$ **)**

9. Klocek o masie m przesuwa sie w nachylonej pod kątem α prostokątnej rynnie. Znajdź przyspieszenie klocka. Współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem i rynną wynosi f. **(Odp.:** $a = g(sin\alpha - \sqrt{2}fcos\alpha)$ **)**



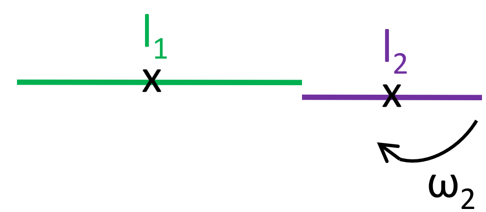


10. Po równi pochyłej o kącie nachylenia α zsuwa się prostopadłościenne naczynie z wodą. Współczynnik tarcia między naczyniem a równią f. Znajdź kąt nachylenia powierzchni wody w naczyniu względem równi zakładając, że f < tgα.
(Odp.: β= arc tg f)



11. Mała piłka po uderzeniu w podłogę traci 1/n części swojej energii kinetycznej. Piłka spada swobodnie z wysokości H. Jaką drogę przebędzie piłka do chwili zatrzymania się?
(Odp.: s= H (2n – 1))
12. Poziom wody w studni obniża się ze stałą, nieznaną prędkością V_s. Do studni zostały wrzucone dwa kamienie w odstępie czasu Δt. Odgłos uderzenia pierwszego kamienia w lustro wody był słyszalny po czasie t_1 od chwili jego puszczenia, natomiast odgłos uderzenia drugiego w lustro wody po czasie t_2 od momentu jego wrzucenia. Prędkość dźwięku w powietrzu V_d. Zakładamy, że V_s jest bardzo małe w porównaniu z V_d. Znaleźć: a) prędkość obniżania się lustra wody V_s
b) Odległość lustra wody od powierzchni Ziemi w chwili puszczenia drugiego kamienia
(Odp.: $V_s = \frac{V_d\left[\sqrt{V_d(V_d+2gt_1)}-\sqrt{V_d(V_d+2gt_2)}+g(t_2-t_1)\right]}{\sqrt{V_d(V_d+2gt_2)}-\sqrt{V_d(V_d+2gt_1)}+g\Delta t}$ **,** $s_2 = \frac{V_d+V_s}{g}\left(V_d - \sqrt{V_d(1+2gt_1)}\right) + V_d t_1 + V_s\Delta t$ **)**
13. Punkt materialny porusza się po okręgu o promieniu R ze stałym przyspieszeniem stycznym a_s. W chwili początkowej prędkość punktu była równa zero. Znajdź:
a) Wartość przyspieszenia normalnego w funkcji czasu
b) Wartość przyspieszenia normalnego w funkcji kąta φ jaki zakreśla promień wodzący punktu
c) Wartość przyspieszenia a w funkcji kąta φ
d) Kąt φ, w którym wartość przyspieszenia stycznego jest równa przyspieszeniu normalnemu

(Odp.: a) $a_n(t) = \frac{a_s^2 t^2}{R}$ **b)** $a_n(\varphi) = 2a_s\varphi$ **c)** $a(\varphi) = a_s\sqrt{1+4\varphi^2}$ **d)** $\varphi = \frac{1}{4}$ **)**
14. Prostopadłościenny klocek został rzucony w kierunku wysokiego muru w ten sposób, że jedna z jego ścian była równoległa do muru. Prędkość klocka V tworzyła kąt α z normalną do muru. Podaj zależność kąta odbicia β od kąta padania α.Przyjmij, że współczynnik tarcia klocka o ścianę wynosi f. **(Odp.:** $\begin{cases} tg\beta = tg\alpha - 2f & \text{dla } tg\alpha > 2f \\ 0 & \text{dla } tg\alpha < 2f \end{cases}$ **)**
15. Dwa pręty o jednakowych masach m i długościach l_1= 2m i l_2= 1m mogą się obracać swobodnie wokół pionowych osi przechodzących przez ich środki. W pewnej chwili prętowi l_2 nadano prędkość kątową ω_2= 10π rad/s. Pręty zderzają się sprężyście swoimi końcami w ten sposób, że ten który się poruszał zatrzymuje się, a nieruchomy zaczyna się obracać. Oblicz czas pomiędzy kolejnymi zderzeniami. **(Odp.:** $\Delta t = \frac{\pi l_1}{\omega_2 l_2} = \frac{1}{5}s$ **)**



16. Piłka została rzucona z prędkością V_0= 10 m/s pod kątem α=60° do poziomu i odbiła się doskonale sprężyście od ściany znajdującej się w odległości d= 10m. W jakiej odległości od miejsca wyrzutu upadnie piłka? **(Odp.:** $l = 2d - \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ **)**
17. Koło o promieniu R toczy się po poziomej powierzchni ze stałą prędkością. W pewnej chwili od koła odrywa się grudka błota znajdująca się w punkcie P i odlatuje ukośnie w górę. Po przebyciu w powietrzu pewnej drogi trafia ponownie do punktu P koła, które w tym czasie wykonuje całkowitą ilość obrotów. Znajdź prędkość koła. **(Odp.:** $V = \sqrt{\pi R g}$ **)**

18. Piłeczka pingpongowa spada z wysokości H= 0,15m na równię pochyłą o długości l= 1m oraz kącie nachylenia α=30˚ i odbija się od niej doskonale sprężyście. W jakiej odległości od miejsca pierwszego odbicia piłeczka odbije się od równi po raz drugi? **(Odp.: s= 8H sinα= 0,6m)**
19. Jaką siłę należy przyłożyć do kuli o masie M i promieniu R, aby ją wtoczyć na stopień o wysokości h < R? **(Odp.:** $\mathbf{F \geq mg\sqrt{h\frac{(2R-h)}{R-h}}}$ **)**
20. Na skrzyni leży klocek o masie m_1= 1kg związany z drugim klockiem o nieznanej masie m_2 cienką nierozciągliwą nitką. Nitka przerzucona jest prze nieruchomy blok przymocowany do krawędzi skrzyni. m_2 ma taką wartość, że siła tarcia statycznego dla m_1 jest największa. Z jakim największym przyspieszeniem może poruszać się skrzynia, aby oba klocki nie zmieniły swojego położenia względem niej. Współczynnik tarcia statycznego f_1 i tarcia dynamicznego dla obu klocków f_2. **(Odp.:** $\mathbf{a = g\frac{f_1+f_2}{1-f_1f_2}}$ **)**