PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Wektory
Kinematyka

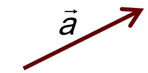
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

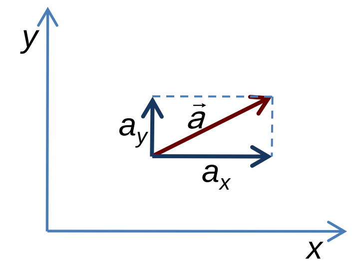
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wektory

Wielkości fizyczne to skalary lub wektory.
Skalar – wielkość określona przez wartość.
Przykłady: ciśnienie, długość, gęstość.
Wektor– wielkość określona przez wartość, kierunek i zwrot.
Przykłady: siła, prędkość, przyspieszenie.
Wektory przedstawiamy graficznie jako strzałki, której długość odpowiada wartości wektora.
W prostokątnym układzie współrzędnych wektor można rozłożyć na składowe.
Wektor $\vec{a}$ przedstawiamy w postaci:



Wektor $\vec{a}$



Wektor $\vec{a}$ w dwuwymiarowym prostokątnym układzie współrzędnych

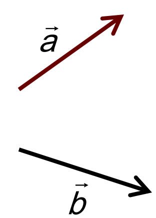
$$\vec{a} = [\underbrace{a_x}_{\text{składowa } x\text{-owa wektora}}, \underbrace{a_y}_{\text{składowa } y\text{-owa wektora}}]$$

Długość wektora $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

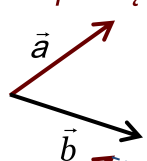
Aby dodać dwa wektory należy dodać odpowiednio współrzędne tych wektorów:

$$\boxed{\vec{a} = [a_x, a_y] \qquad \vec{b} = [b_x, b_y] \qquad \vec{a} + \vec{b} = [a_x + b_x, a_y + b_y]}$$

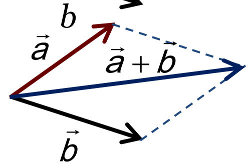
Graficznie dodajemy wektory metodą równoległoboku:



•*Przesuwamy wektory tak, aby ich początki były w jednym punkcie,*



•*Budujemy równoległobok,*



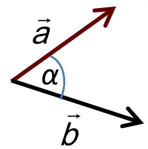
•*Przekątna równoległoboku jest szukaną sumą* $\vec{a} + \vec{b}$

Mnożenie wektorów

Dla wektorów można zdefiniować dwa rodzaje iloczynów:

- **Iloczyn skalarny** – wynik mnożenia jest skalarem. Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zapisujemy: $\vec{a}\cdot\vec{b}$
- **Iloczyn wektorowy** – wynik mnożenia jest wektorem. Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zapisujemy: $\vec{a}\times\vec{b}$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$



$$c = \vec{a}\cdot\vec{b}$$

kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$

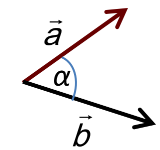
$$c = \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$

wartość wektora $\vec{a}$

wartość wektora $\vec{b}$

Jeśli wektory są równoległe (α = 0), to iloczyn skalarny ma wartość maksymalną i wynosi $c = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$
Jeśli wektory są prostopadłe (α = 90⁰), to iloczyn skalarny wynosi 0.

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$



$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$$

Wartość wektora $\vec{c}$:

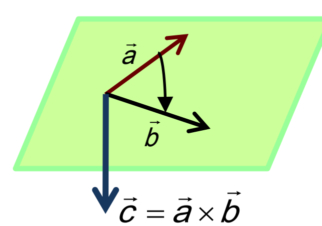
Kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$

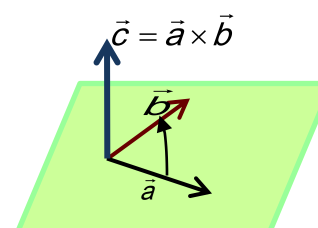
$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha$$

wartość wektora $\vec{a}$

wartość wektora $\vec{b}$

Kierunek wektora $\vec{c}$ jest prostopadły do obu wektorów, a zwrot określa reguła śruby prawoskrętnej – jeśli kręcimy śrubą od wektora $\vec{a}$ do $\vec{b}$, to jej ruch posuwisty wyznacza zwrot wektora $\vec{c}$

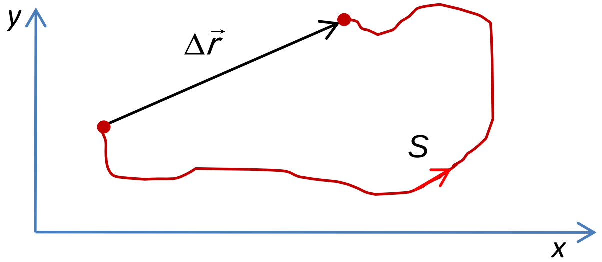




Jeśli wektory są równoległe (α = 0), to iloczyn wektorowy wynosi 0.
Jeśli wektory są prostopadłe (α = 90⁰), to iloczyn wektorowy ma wartość maksymalną, która wynosi $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

Kinematyka – opis ruchu

Ruch to zmiana położenia ciała względem innego ciała lub ogólniej - względem wybranego układu odniesienia.
Punkt materialny – ciało posiadające masę i zaniedbywalnie małe rozmiary (np. ruch Ziemi po orbicie wokółsłonecznej można rozpatrywać jako ruch punktu materialnego, ale ruch obrotowy Ziemi – już nie).
Tor – zbiór kolejnych położeń poruszającego się punktu.
Droga – długość toru.
Przesunięcie – wektor, którego początek jest w początkowym położeniu, a koniec w końcowym położeniu poruszającego się punktu. Długość wektora przesunięcia na ogół **nie jest równa** drodze (rysunek).



Droga S i przesunięcie $\Delta\vec{r}$ w dwuwymiarowym prostokątnym układzie współrzędnych

Ruch prostoliniowy

Prędkość średnia to stosunek drogi przebytej w czasie *t* do czasu *t*:

droga przebyta w czasie *t*

$$v_{śr} = \frac{S}{t}$$

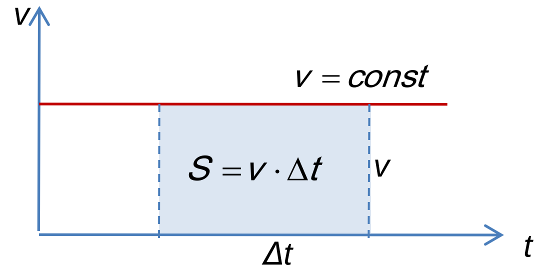
Prędkość chwilową określamy jako stosunek drogi *ΔS* przebytej w czasie *Δt* do czasu *Δt,* jeśli przedział czasu *Δt* dąży do zera.

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad \text{gdy } \Delta t \to 0$$

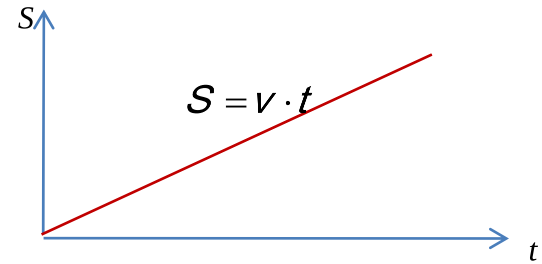
W ruchu jednostajnym prostoliniowym (*v* = 0)

Prędkość: $v = \frac{S}{t}$

Droga: $S = v \cdot t$



Wykres prędkości od czasu w ruchu jednostajnym prostoliniowym. Pole pod wykresem równe jest liczbowo drodze przebytej w czasie *Δt.*



Wykres drogi od czasu w ruchu jednostajnym prostoliniowym.

Przyspieszenie pokazuje jak szybko zmienia się prędkość. Jest to stosunek przyrostu prędkości *Δv* do czasu *Δt*, w którym ten przyrost nastąpił, gdy czas *Δt* dąży do zera.

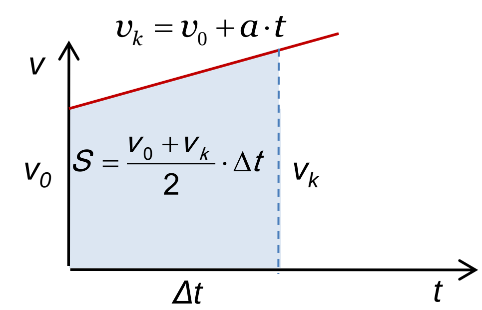
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{gdy } \Delta t \to 0$$

Ruch jednostajnie przyspieszony to ruch, w którym przyspieszenie jest stałe $a = const$
W **ruchu opóźnionym** przyspieszenie jest ujemne $a < 0$

W ruchu jednostajnie przyspieszonym z prędkością początkową v_0:

Prędkość końcowa: $v_k = v_0 + a \cdot t$

Droga: $S = \frac{v_0 + v_k}{2} \cdot t = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$



Wykres prędkości od czasu w ruchu prostoliniowym, jednostajnie przyspieszonym. Pole pod wykresem równe jest liczbowo drodze przebytej w czasie *Δt.*

W ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej:

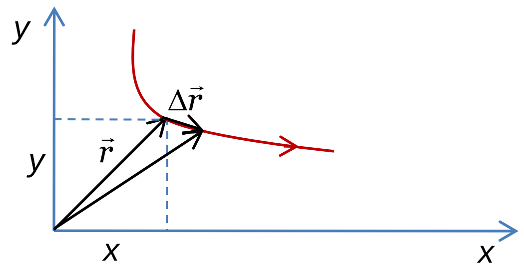
Prędkość końcowa: $v_k = a \cdot t$

Droga: $S = \frac{a \cdot t^2}{2}$

Ruch krzywoliniowy

W ruchu na płaszczyźnie położenie punktu wyznacza **wektor wodzący** punktu $\vec{r} = [x, y]$

Prędkość zdefiniowana jest jako stosunek zmiany wektora wodzącego $\Delta\vec{r}$ do czasu *Δt*, w którym ta zmiana nastąpiła, przy *Δt* dążącym do zera. Zwróćmy uwagę, że prędkość, czyli iloraz wektora $\Delta\vec{r}$ przez skalar *Δt*, jest również wektorem.



$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad \text{gdy } \Delta t \to 0$$

Zapisując wektory w postaci składowych mamy:

$$[v_x, v_y] = \left[\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}\right] \quad \text{gdy } \Delta t \to 0$$

czyli:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ v_y &= \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \text{gdy } \Delta t \to 0$$

Jeśli rozpatrujemy ruch w przestrzeni trójwymiarowej, to z-owa składowa prędkości wyraża się analogicznie:

$$v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Przyspieszenie to stosunek zmiany wektora prędkości $\Delta\vec{v}$ do czasu *Δt*, w którym ta zmiana nastąpiła, przy *Δt* dążącym do zera.

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad \text{gdy } \Delta t \to 0$$

Zapisując to dla składowych wektorów mamy:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ a_y &= \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \text{gdy } \Delta t \to 0$$

I trzecia składowa wektora przyspieszenia:

$$a_z = \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$$

Wektor prędkości jest zawsze styczny do toru, wektor przyspieszenia może mieć dowolny kierunek.
Przyspieszenie można rozłożyć na dwa wektory składowe: styczny do toru $\vec{a}_s$ i prostopadły do stycznej, skierowany wzdłuż promienia, $\vec{a}_r$

Składowa styczna przyspieszenia $\vec{a}_s$ związana jest ze zmianą wartości prędkości i nazywamy ją przyspieszeniem stycznym:

$$a_s = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \text{gdy } \Delta t \to 0$$

gdzie *v* jest wartością prędkości $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

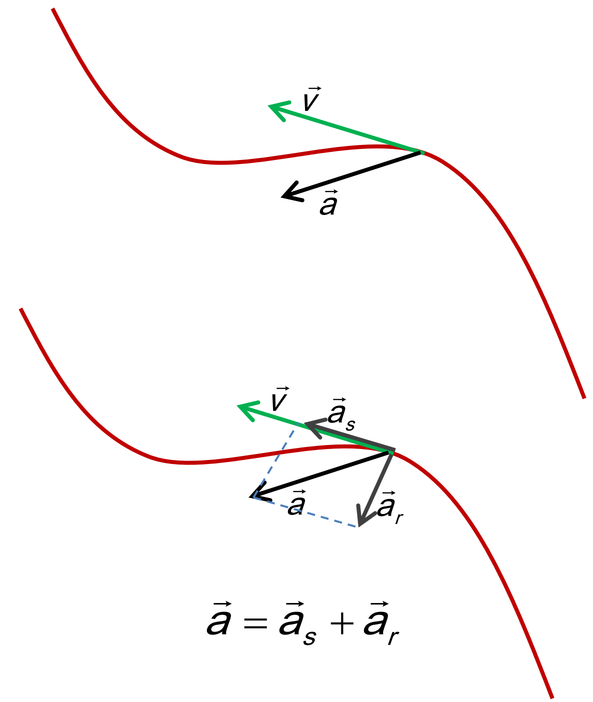
Składowa normalna przyspieszenia $\vec{a}_r$ związana jest ze zmianą kierunku prędkości i nazywamy ją przyspieszeniem dośrodkowym:

$$a_r = \frac{v^2}{R}$$

gdzie *v* jest wartością prędkości, *R* promieniem krzywizny toru.

Wartość przyspieszenia całkowitego wynosi:

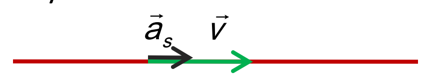
$$a = \sqrt{a_s^2 + a_r^2}$$



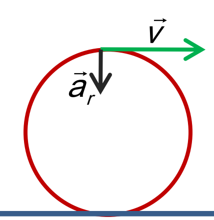
$$\vec{a} = \vec{a}_s + \vec{a}_r$$

Przypadki szczególne:

• $a_r = 0$ Kierunek prędkości nie zmienia się, a więc ruch jest prostoliniowy.

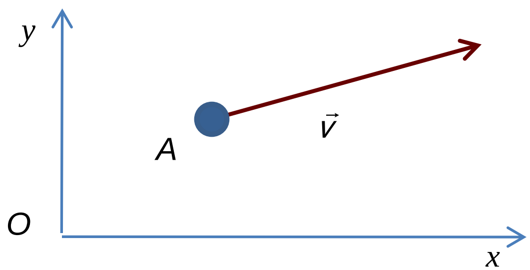


• $a_s = 0$ Wartość prędkości nie zmienia się, ale zmienia się kierunek – ciało porusza się ruchem jednostajnym po okręgu.

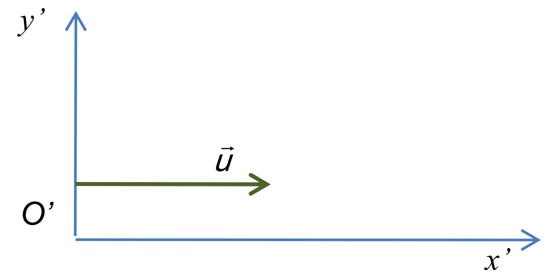


Prędkość względna.

Ciało A porusza się względem układu odniesienia O z prędkością $\vec{v}$. Inny układ O' porusza się względem układu odniesienia O z prędkością $\vec{u}$. Jaka jest prędkość ciała *A* względem układu *O'*?

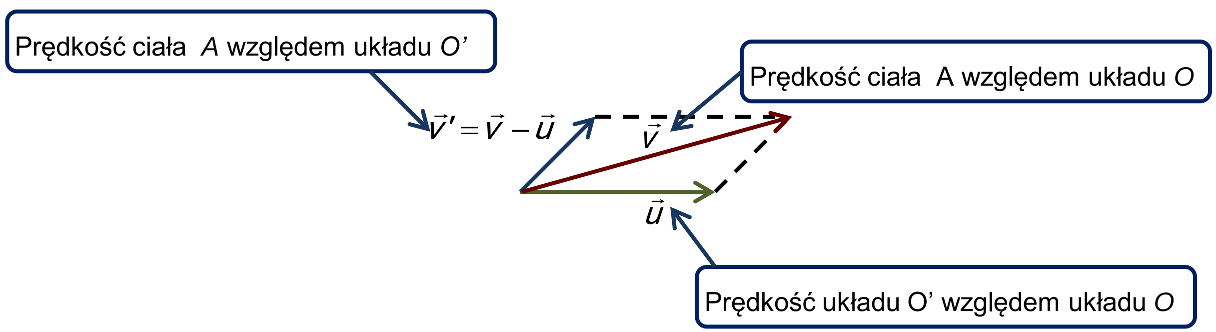


Ciało *A* porusza się względem układu *O* z prędkością $\vec{u}$



Układ *O'* porusza się względem układu *O* z prędkością $\vec{u}$

Aby obliczyć prędkość ciała *A* względem układu *O'* trzeba od wektora $\vec{v}$ odjąć wektor $\vec{u}$ $\quad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$



Ruch po okręgu

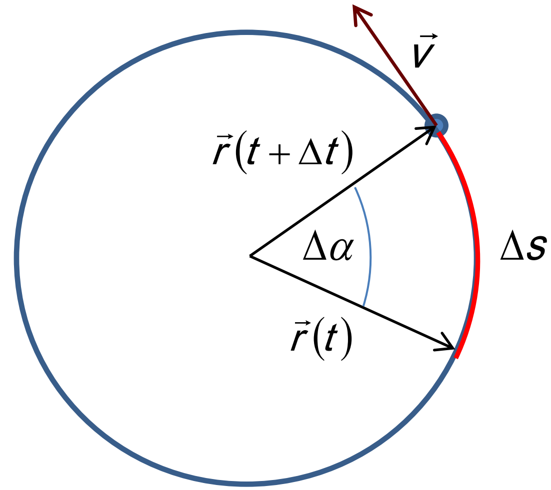
Ruch po okręgu jest szczególnym przypadkiem ruchu krzywoliniowego. W ruchu takim długość wektora wodzącego jest stała i równa promieniowi okręgu: $|\vec{r}| = R$

W ruchu po okręgu położenie ciała określa kąt α zakreślony przez wektor wodzący.

Ruch ciała w ruchu po okręgu możemy więc opisać podając funkcję $\alpha(t)$

Wektor wodzący ciała które przebyło w ruchu po okręgu odcinek łuku o długości Δs zakreśla kąt

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta s}{R}$$



Prędkość kątową ω ciała poruszającego się po okręgu definiujemy jako stosunek kąta $\Delta\alpha$ do czasu w jakim to nastąpiło:

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \quad \text{gdy } \Delta t \to 0}$$

Korzystając z wyrażenia na $\Delta\alpha$ oraz z definicji prędkości:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t R} = \frac{v}{R}$$

Związek pomiędzy prędkością kątową a prędkością liniową ma więc postać:

$$\boxed{v = \omega R}$$

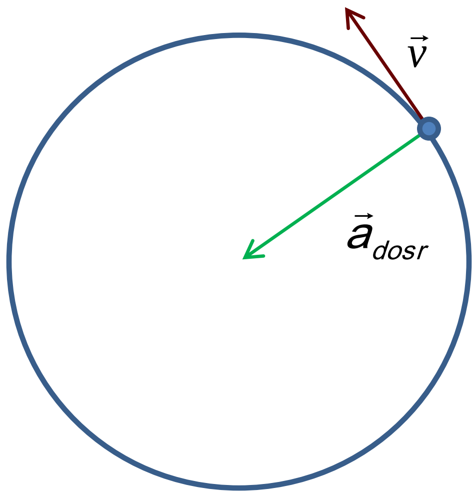
Przyspieszenie kątowe ε definiujemy jako stosunek zmiany prędkości kątowej $\Delta\omega$ do czasu w jakim ta zmiana nastąpiła:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{gdy } \Delta t \to 0}$$

W ruchu po okręgu: $\Delta\omega = \dfrac{\Delta v}{R}$ więc:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t R} = \frac{a_s}{R}$$

Gdzie a_s jest składową styczną przyspieszenia



Przyspieszenie normalne w ruchu po okręgu nazywamy **przyspieszeniem dośrodkowym.** Przyspieszenie dośrodkowe skierowane jest zawsze do środka okręgu.

$$a_{dosr} = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

Wartośc całkowitego przyspieszenia w ruchu po okręgu jest równa:

$$a = \sqrt{a_{dosr}^2 + a_s^2} = \sqrt{\omega^4 R^2 + \varepsilon^2 R^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

Ruchem jednostajnym po okręgu nazywamy taki ruch po okręgu, w którym prędkość kątowa, a tym samym prędkość liniowa, jest stała. W ruchu takim możemy mówic o okresie ruchu oraz częstotliwości.

Okresem ruchu nazywamy czas *T* w którym ciało zakreśla jeden pełny okrag. Długość jednego pełnego okręgu wynosi $s=2\pi R$.

$$T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi R}{\omega R} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Częstotliwością *f* nazywamy odwrotność okresu. Czestotliwość jest ilością pełnych obiegów przypadającą na jednostkę czasu.

$$f = \frac{1}{T}$$

Zadanie 1

Przez ¼ czasu rowerzysta jechał z prędkością v_1 = 20 km/h, a przez ¾ czasu z prędkością v_2 = 8 km/h. Jaka była średnia prędkość rowerzysty?

<u>Rozwiązanie:</u>

Korzystamy ze wzoru: $v_{sr} = \frac{S}{t} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2}$

gdzie S_1 to droga przebyta w czasie $t_1 = \frac{3}{4} \cdot t$ $\quad S_1 = \frac{1}{4} \cdot t \cdot v_1$

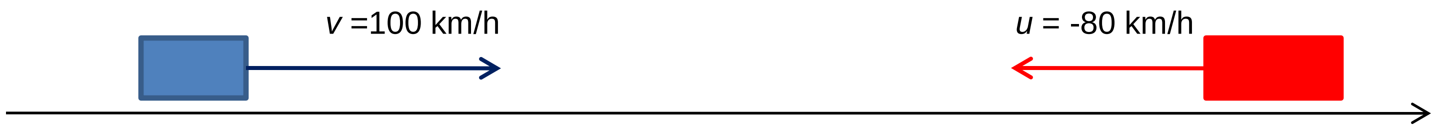
S_2 - to droga przebyta w czasie $t_2 = \frac{1}{4} \cdot t$ $\quad S_2 = \frac{3}{4} \cdot t \cdot v_2$

$$v_{sr} = \frac{\frac{1}{4} \cdot t \cdot v_1 + \frac{3}{4} \cdot t \cdot v_2}{t} = \frac{1}{4} \cdot v_1 + \frac{3}{4} v_2 = 11 \frac{km}{h}$$

Zadanie 2

Samochód niebieski jedzie na wschód z prędkością 100 km/h, a samochód czerwony porusza się w kierunku zachodnim z prędkością 80 km/h. Jaka jest prędkość samochodu niebieskiego względem samochodu czerwonego?

<u>Rozwiązanie:</u>

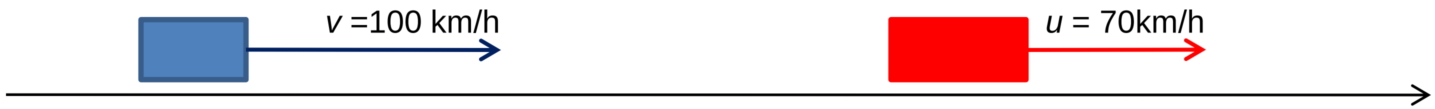


Prędkość samochodu niebieskiego względem samochodu czerwonego : $v' = v - u$ = 100km/h –(-80 km/h) = 180 km/h. Rzeczywiście kierowca w samochodzie czerwonym widzi samochód niebieski zbliżający się do niego z prędkością 180 km/h.

Zadanie 3

Samochód czerwony jedzie z prędkością 70 km/h, a niebieski dogania go z prędkością 100 km/h. Jaka jest prędkość samochodu niebieskiego względem samochodu czerwonego?

<u>Rozwiązanie:</u>



Prędkość samochodu niebieskiego względem samochodu czerwonego : $v' = v - u$ = 100km/h –70 km/h)= 30 km/h. Kierowca w samochodzie czerwonym widzi samochód niebieski zbliżający się do niego z prędkością 30 km/h.

Zadanie 4
Dwóch biegaczy startuje w przeciwnych kierunkach na bieżni o obwodzie długości D=200m. Jeden z biegaczy biegnie ze stałą prędkością v_1=6m/s a drugi z prędkością v_2=4m/s. Po jakim czasie spotkają się oni po raz pierwszy i jaką odległość przebędzie do tej chwili każdy z biegaczy?

<u>Rozwiązanie:</u>
Kiedy biegacze się spotkają, suma odległości jaką łącznie przebyli jest równa długości bieżni czyli 200m. Każdy z biegaczy porusza się ruchem jednostajnym wiec odległość przez niego przebyta *d=vt*

$$d_1 = v_1 t$$
$$d_2 = v_2 t$$

$$D = d_1 + d_2 = v_1 t + v_2 t$$
$$t = \frac{D}{v_1 + v_2} = \frac{200m}{10m/s} = 20s$$
$$d_1 = v_1 t = 6m/s \cdot 20s = 120m$$
$$d_2 = v_2 t = 4m/s \cdot 20s = 80m$$

Biegacze spotkają się po 20 sekundach. Szybszy z nich przebędzie do tego czasu drogę 120m a wolniejszy 80m.

Zadanie 5
Rozpatrz sytuację analogiczną do tej z poprzedniego zadania, z tym wyjątkiem, że teraz biegacze startują w tym samym kierunku. Po jakim czasie wolniejszy biegacz zostanie dogoniony przez biegacza wolniejszego (zostanie „zdublowany”) ?

<u>Rozwiązanie:</u>
„Zdublowanie” oznacza, że szybszy biegacz przebędzie w tym samym czasie co biegacz wolniejszy drogę dłuższą o długość bieżni.

$$d_1 = v_1 t$$
$$d_2 = v_2 t$$

$$d_2 = d_1 + D$$
$$v_2 t = v_1 t + D$$
$$t = \frac{D}{v_1 - v_2} = \frac{200m}{6m/s - 4m/s} = 100s$$
$$d_1 = 6m/s \cdot 100s = 600m$$
$$d_2 = 4m/s \cdot 100s = 400m$$

Powyższy wynik oznacza, że biegacz szybszy dogoni biegacza wolniejszego po przebiegnięciu 600m czyli dokładnie trzech pełnych okrążeń. W chwili doścignięcia biegacz wolniejszy będzie kończył swoje drugie okrążenie, czyli przebiegnire 400m.

Zadanie 6

Motocykl startuje do wyścigu poruszając tak, że odległość od punktu startu zależy od czasu jak $x(t)=bt^2$ gdzie $b=1.5\ m/s^2$. Z jaką prędkością średnią motocykl porusza się w ciagu pierwszych 10 sekund jazdy ? Z jaką średnią prędkością poruszał się w przedziale czasu 6-12 sekund ?

<u>Rozwiązanie:</u>

Prędkość średnia jest rówa stosunkowi przesunięcia do czasu w jakim to przesunięcie nastąpiło. Jeśli położenie motocykla w punkcie startu przyjmiemy jako x=0 to podstawiając czas t=10s do równania $x(t)=1.5\ m/s^2\cdot(10s)^2$ otrzymujemy 150m. Przesunięcie motocykla po upływie 10 seskund będzie więc wynosić:

$$x(10s)-x(0s)=150m$$

$$v_{sr}=\frac{150m}{10s}=15m/s$$

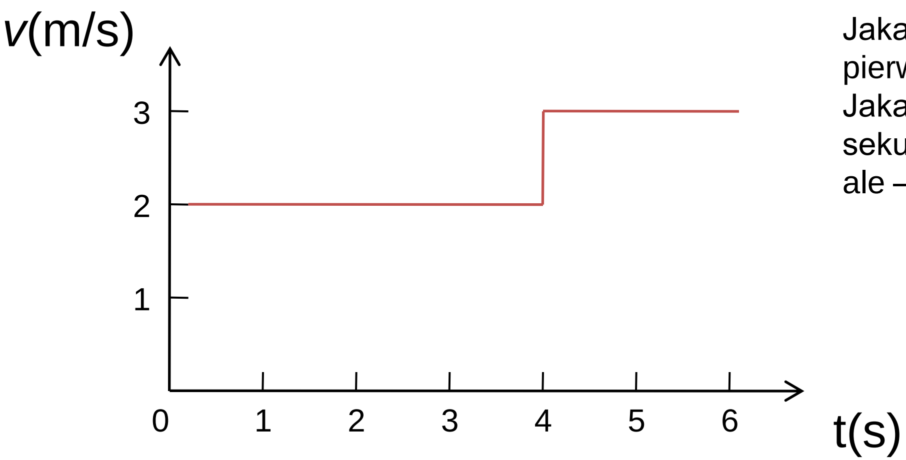
W przedziale czasu 6 – 12 sekund przesunięcie motocykla wynosi:

$$x(12s)-x(6s)=1.5m/s^2\cdot(12s)^2-1.5m/s^2\cdot(6s)^2=162m$$

Przesunięcie to nastąpiło w czasie 12s−6s=6s

$$v_{sr}=\frac{162m}{6s}=27m/s$$

Zadanie 7
Piłka porusza się po linii prostej, a zależność jej prędkości od czasu przedstawiono na rysunku.



Jaka jest prędkość średnia piłki w ciagu pierwszych 6 sekund ruchu ?
Jaka byłaby prędkośc średnia piłki gdyby po 4 sekundach ruch jej prędkośc wynosiła nie +3m/s ale – 3m/s ?

Rozwiązanie:
W przedziale czasu Δt_1 od t=0 to t=4s prędkość piłki była stała i wynosiła v_1=2m/s. Droga jaką piłka przebyła w tym czasie była równa $S_1=\Delta t_1 \cdot v_1 = 4s \cdot 2m/s = 8m$. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla przediału czasu Δt_2 otrzymujemy $S_2=\Delta t_2 \cdot v_2 = 2s \cdot 3m/s = 6m$. Całkowita droga przebyta w czasie Δt od t=0 to t=6s wynosi więc S=8m+6m=14m. Średnia prędkość w ciągu pierwszych 6 sekund ruchu wynosi więc: v_{sr}=14m/6s≈2.33 m/s.
Gdyby prędkość po 4 sekundach wynosiła -3m/s zamiast +3m/s, to przesunięcie piłki w przedziale czasu Δt_2 wynosiłaby $S_2=\Delta t_2 \cdot v_2 = 2s \cdot (-3m/s) = -6m$. Całkowita droga przebyta w w czasie Δt=6s wynosiłaby S=8m-6m=2m. W takim przypadku prędkość średnia wynosiłaby v_{sr}=2m/6s≈0.33 m/s.

Zadanie 8

Tenisista serwując uderzając piłkę nadaje jej prędkość początkową 60m/s. Czas kontaktu piłki z naciągiem rakiety wynosi 30ms. Zakładając, że podczas serwisu piłka znajduje się początkowo w spoczynku oblicz wartość przyspieszenia jakiego doznaje piłka oraz drogę jaką przebywa ona w trakcie serwisu

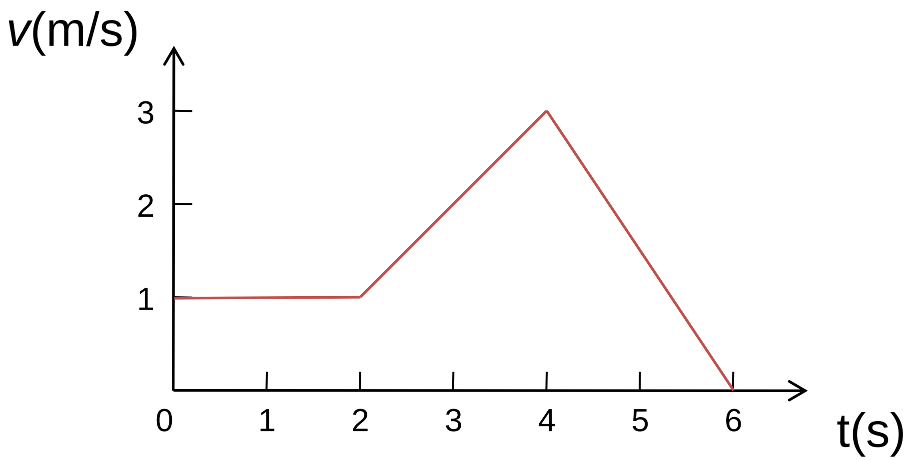
<u>Rozwiązanie:</u>

Zakładamy, że piłka podczas serwisu porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym. Wartość przyspiesznia jest równa stosunkowi zmiany prędkości do czasu w jakim ta zmiana nastąpiła. Zmiana prędkości od zera do 60m/s następuje w czasie 30ms, tak więc przyspieszenie piłki podczas serwisu wynosi $a=(60m/s)/(30\cdot 10^{-3}s)=2\cdot 10^3\ m/s^2$

Droga jaką przebywa piłka jest drogą w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej. Mamy więc $S=at^2/2= 2\cdot 10^3\ m/s^2\cdot (30\cdot 10^{-3}s)^2/2=90cm$

Zadanie 9

Samochód porusza się z prędkością zależną od czasu taką jak na rysunku. Znajdź wartości przyspieszenia w chwili czasu t=1s, t=3s, t=5s. Jaką drogę przebył samochód w ciągu pierwszych 6 sekund ruchu ?



Rozwiązanie:

W przedziale czasu od t=0s do t=2s prędkość samochodu była stała (poruszał się ruchem jednostajnym) i wynosiła 1m/s, tak więc jego przyspieszenie w chwili t=1s (podobnie jak w każdej innej chwili czasu z zakresu od 0 do 2s) było zerowe. W czasie od t=2s do t=4s prędkość samochodu wzrosła od 1m/s do 3m/s (samochód poruszał się ruchem jednostajnie przyspieszonym). Wartość przyspieszani możemy obliczyć dzieląc zmianę prędkości Δv=3m/s-1m/s=2m/s przez czas w jakim zmiana ta nastąpiła: a=(2m/s)/(2s)=1m/s^2. Taką też wartość przyspieszenia można przypisać samochodowi w chwili t=3/s. W czasie od t=4s do t=6s prędkość zmalała od 3m/s do 0m/s. Zmiana prędkości w tym przedziale czasu była ujemna i wynosiła Δv=0m/s-3m/s=-3m/s, a przyspieszenie a=(-3m/s)/(2s)=-1.5m/s^2. Drogę jaką przebył samochód w czasie pierwszych 6 sekund ruchu możemy znaleźć sumując drogi dla trzechprzedziałów czasu stosując wzory na drogę w ruchu jednostajnym i jednostajnie przyspieszonym z prędkością początkową:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 1m/s \cdot 2s + 1m/s \cdot 2s + 1/2 \cdot 1m/s^2 \cdot (2s)^2 + 3m/s \cdot 2s - 1/2 \cdot 1.5m/s^2 \cdot (2s)^2 = 9m$$

Możemy zauważyć, że ten sam wynik otrzymamy obliczjąc pole powierzcni zawarej pod krzywą v(t)

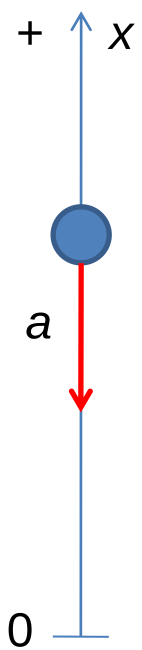
Zadanie 10

Chłopiec podrzuca piłkę pionowo do góry z prędkością początkową 15m/s. Na jaką wysokość wzniesie się piłka? Jaka będzie jej prędkość w najwyższym punkcie lotu? Jakie będzie jej przyspieszenie w tym punkcie? Przyjmujemy, że wartośc przyspieszenia ziemskiego wynosi g=9.8 m/s^2.

<u>Rozwiązanie:</u>

Rzucona swobodnie piłka porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem równym co do wielkości wartości przyspieszenia ziemskiego i skierowanym pionowo w dół. Piłka doznaje takiego przyspieszenia przez cały czas swojego lotu. Problme rozptrujemy w jednowymiarowym układzie odniesienia którego początek umieszczamy w miejscu wyrzutu piłki a kierunek „do góry'" traktować będziemy jako „dodatni". W takim układzie odniesienia przyspieszenie *a* jakiego doświadcza piłka wynosi –*g* (ponieważ skierowane jest przeciwnie do przyjętego wcześniej za „dodatni" kierunku). Położenie piłki w chwili wyrzutu wynosi w naszym układzie 0, a jej prędkość początkowa +v_0. Możemy napisać ogólną postać równanie ruchu (położenie piłki w funkcji czasu):

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$



W naszym zadaniu położenie poczatkowe piłku x_0=0, a=-g: $x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

Możemy również napisać równanie opisujące zależność prędkości piłki od czasu. Ogólna postać takiego równania $v(t)=v_0+at$ w naszym przypadku przybieże postać:

$$v(t) = v_0 - gt$$

W najwyższym puncie lotu prędkość piłki będzie wynosiła 0. Podstawiając $v(t_0)=0$ (przez t_0 będziemy rozumieć czas po jakim piłka osiągneła najwyższy punkt) otrzymujemy:

$$t_0 = v_0 / g$$

Wysokość na jaką wzniesie się piłka (oznaczmy ją jako H) obliczamy wstawiając czas t_0 do równania ruchu x(t):

$$H = x(t_0) = v_0 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2$$

Otrzymawszy rozwiązania w formie równań zawierających symbole możemy wstawić odpowiadające im wartości liczbowe podane w treści zadania. Otrzymujemy:

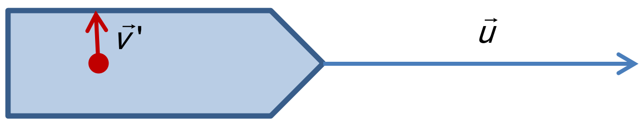
$$t_0 = \frac{15 m/s}{9.8 m/s^2} \approx 1.53 s$$

$$H = 15 m/s \cdot 1.53 s - \frac{1}{2} 9.8 m/s^2 \cdot (1.53 s)^2 \approx 11.48 m$$

Zadanie 11

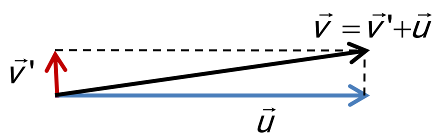
Marynarz idzie po pokładzie z prędkością *v'* = 4 km/h prostopadle do kierunku ruchu statku. Prędkość statku względem wody wynosi *u* = 20 km/h. Jaka jest prędkość marynarza względem wody?

Rozwiązanie:



Prędkość marynarza względem wody oznaczmy $\vec{v}$. Ze wzoru: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$ wyznaczamy $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$

Dodajemy wektorowo:



Wartość wektora $\vec{v}$:

$$v = \sqrt{u^2 + v'^2} = 20{,}4\,\frac{km}{h}$$

Zadanie 12

Na jaką wysokość wzniesie się ciało wyrzucone z prędkością v_0 pionowo do góry? Przyspieszenie ziemskie wynosi *g*, opór powietrza pomijamy.

Rozwiązanie:

Ciało porusza się do góry ruchem jednostajnie opóźnionym, a jego prędkość końcowa wynosi 0.

Ze wzoru na prędkość końcową wyznaczamy czas wznoszenia t_w:

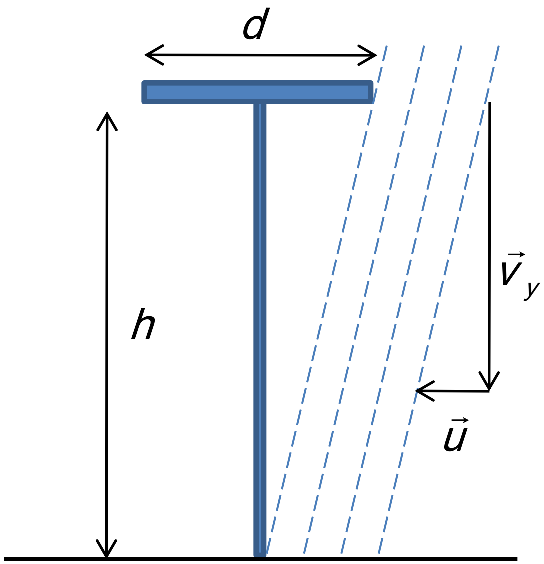
$$0 = v_0 - g \cdot t_w \quad \Longrightarrow \quad t_w = \frac{v_0}{g}$$

Wysokość na jaką wzniesie się ciało obliczamy ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie opóźnionym:

$$H = v_0 \cdot t_w - \frac{g \cdot t_w^2}{2} = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$$

Zadanie 13

Człowiek chroniąc się od deszczu trzyma okrągły parasol na wysokości h=2m. Parasol ma średnicę d=1m. Jaka może być maksymalna prędkość wiatru, która nie spowoduje, że człowiek zmoknie. Pionowa składowa prędkości kropel deszczu wynosi 8m/s.



Rozwiązanie:
Wiejący wiatr nadaje kroplom deszczu składową poziomą prędkości. Oznaczmy prędkość wiatru jako *u*, a pionową składową prędkości kropel jako v_y. Zakładamy, że składowa pozioma prędkości kropel jest równa prędkości wiatru. Oznaczmy przez t czas jaki potrzebuje kropla, żeby opaść z wysokości *h* na ziemię. Mając na uwadze fakt, że ruch kropli w pionie i ruch w poziomie (związany z unoszeniem przez witar) są niezależne możemy obliczyc czas *t*:

$$t = \frac{h}{v_y}$$

W czasie *t* kropla pokonuje pewną odległość w poziomie (oznaczmy ją jako *x*). Jeśli człowiek stoi dokładnie pod środkiem parasola, to warunkiem na to, że krople deszczu go nie dosięgną jest to, by odległość jaką przebędą krople w poziomie była nie większa niż połowa średnicy parasola (x≤d/2). Wartośc x możemy obliczyć z:

$$x = u \cdot t = \frac{uh}{v_y}$$

Warunek na to, że człowiek nie zmoknie: ma więc postać:

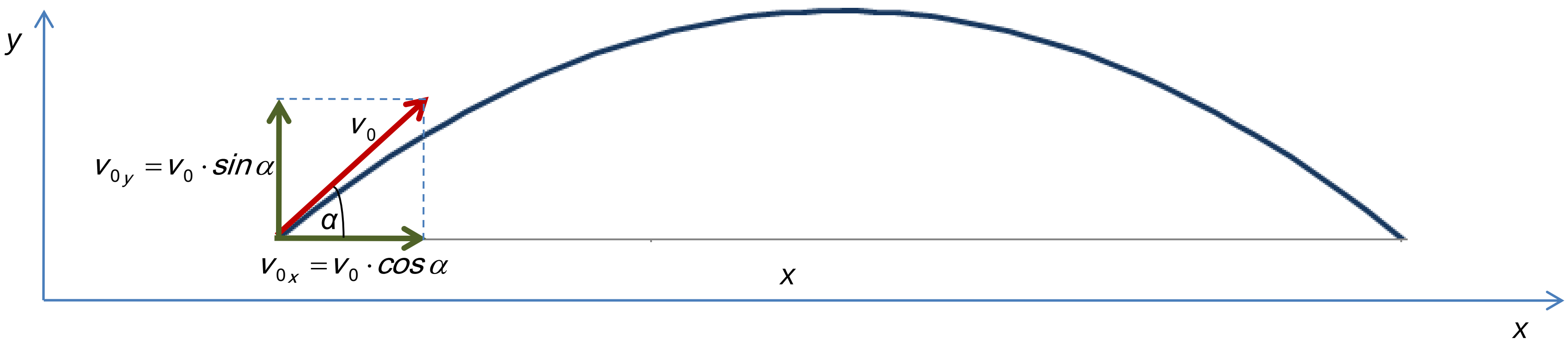
$$\frac{d}{2} \geq \frac{uh}{v_y}$$ czyli: $$u \leq \frac{dv_y}{2h}$$

Podstawiając wartości liczbowe dane w zadaniu otrzymujemy odpowiedź:

$$u \leq 2m/s$$

Zadanie 14

Oblicz zasięg *x* pocisku wystrzelonego z prędkością v_0 pod kątem *α* do poziomu. Przyspieszenie ziemskie wynosi *g*, opór powietrza pomijamy.



Rozwiązanie:

Ruch pocisku odbywa się z przyspieszeniem skierowanym pionowo w dół (przyspieszenie ziemskie). Rozpatrujemy ruch pocisku jako złożenie dwóch niezależnych ruchów: w kierunku poziomym (wzdłuż osi *x*) i w kierunku pionowym (wzdłuż osi *y*).

Rzut ukośny

Ruch w kierunku poziomym

Składowa pozioma przyspieszenia $a_x = 0$, a więc ruch wzdłuż osi *x* jest ruchem jednostajnym z prędkością:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$$

Zasięg ruchu *x* wyraża się więc wzorem: $x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$ gdzie t to całkowity czas ruchu.

Ruch w kierunku pionowym

Składowa pionowa przyspieszenia $a_y =$ -g, a więc ruch wzdłuż osi *x* jest rzutem pionowym do góry z prędkością początkową:

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$$

Czas wznoszenia obliczamy ze wzoru na prędkość końcową w ruchu jednostajnie opóźnionym:

$$0 = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t_w \quad \Rightarrow \quad t_w = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$$

Maksymalna wysokość *H*, na jaką wzniesie się pocisk:

$$H = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_w - \frac{g \cdot t_w^2}{2} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2 \cdot g}$$

Czas spadania obliczymy ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez początkowej prędkości:

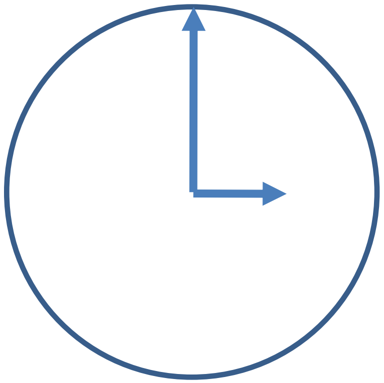
$$H = \frac{g \cdot t_s^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_s = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2 \cdot g}} = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} = t_w$$

Całkowity czas ruchu wynosi: $t = t_w + t_s = \dfrac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$

Zasięg rzutu wynosi więc: $x = v_0 \cos\alpha \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2(2\sin\alpha\cos\alpha)}{g} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

Zadanie 15

Wskazówka minutowa zegara jest dwa razy krótsza od wskazówki godzinowej. Oblicz: stosunek prędkości kątowych wskazówek, stosunek prędkości liniowej końców wskazówek, stosunek przyspieszeń dośrodkowych końców wskazówek.



Rozwiązanie:

Stosunek okresu obiegu wskazówki minutowej do okresu wskazówki godzinowej wynosi 1/12. Ponieważ $\omega=2\pi/T$, to stosunek prędkości kołowych wynosi:

$$\frac{\omega_m}{\omega_g}=12$$

Prędkości liniowe końców otrzymujemy mnożąc prędkości kątowe przez promienie obiegu końców wskazówek:

$$\frac{v_m}{v_g}=\frac{\omega_m R}{\omega_g R/2}=\frac{2\omega_m}{\omega_g}=24$$

Stosując wyrażenie na przyspieszenie dośrodkowe $a_d=\frac{v^2}{R}=\omega^2 R$ otrzymujemy:

$$\frac{a_{dm}}{v_{dg}}=\frac{\omega_m^2 R}{\omega_g^2\left(\frac{R}{2}\right)}=\frac{2\omega_m^2}{\omega_g^2}=288$$

Zadanie 16

Motocykl startując do wyścigu przyspiesza do 120km/h po przejechaniu drogi s=150m. Koło motocykla ma średnicę d=80cm. Znajdź przyspieszenie kątowe kół motocykla.

Rozwiązanie:

Przyspieszenie kątowe jest zdefiniowane jako stosunek zmiany prędkości kątowej do czasu w jakim ta zmiana nastąpiła:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Zmiana prędkości kątowej koła jest związana ze zmianą prędkości liniowej motocykla Δv: $\Delta\omega = \frac{\Delta v}{R}$

gdzie R jest promieniem koła (*R=d/2*)

Czas Δt możemy obliczyć ze związku: $s = \frac{a(\Delta t)^2}{2}$ oraz: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Po przekształceniach otrzymujemy: $\Delta t = \frac{2s}{\Delta v}$

Podstawiając do wyrażenia na przyspieszenie kątowe mamy: $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta v}{R}}{\frac{2s}{\Delta v}} = \frac{\Delta v^2}{2sR}$

Po wstawieniu danych liczbowych: $\varepsilon = 9.26 s^{-2}$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Kropla deszczu spada pionowo w dół poruszając się ruchem jednostajnym z prędkością v_1=70m/s. opisz ruch kropli względem samochodu jadącego ze stałą prędkością 108 km/h po poziomej szosie. **(Odp.:v = 76.2m/s, tgα = 3/7)**
2. Człowiek wchodząc po stojących w miejscu nieruchomych schodach pokonuje je w ciągu 90s. Jeśli stanie on nieruchomo na jadących schodach zostaje wwieziony na górę w czasie 60s. Jak szybko znalazłby się na szczycie gdyby wchodził po jadących schodach? **(Odp.: t = 36s)**
3. Dwie żaglówki wyruszyły jednocześnie w drogę w kierunkach wzajemnie prostopadłych, jedna z prędkością v_1=20km/h a drugi z prędkością v_2=30km/h. Oblicz prędkość ich wzajemnego oddalania oraz och odległość po czasie 20 minut. **(Odp.: v = 36.06km/h, s = 12.1km)**
4. Pasażer pociągu osobowego jadącego z prędkością v_1=60km/h mija pociąg towarowy o długości 100m, który porusza się z prędkością 40km/h w kierunku przeciwnym. Oblicz jak długo pociąg towarowy będzie mijał pasażera pociągu osobowego. **(Odp.: 3.6s)**
5. Rowerzysta porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym. W ciągu 10 sekund przejechał 30m, przy czym jego prędkość wzrosła pięciokrotnie. Oblicz przyspieszenie rowerzysty. **(Odp.: 0.4m/s^2)**
6. W jakim odstępie czasu oderwały się od urwiska dwa kamienie jeśli po upływie 2.5s licząc od oderwania się drugiego kamienia odległość między kamieniami wynosiła 30m? **(Odp.: 1s)**
7. Pierwsza z dwóch piłek zostaje rzucona pionowo w górę z prędkością 50m/s. Po upływie jednej sekundy z ta samą prędkością i w tym samym kierunku zostaje rzucona druga piłka. Kiedy, gdzie i z jaką prędkością spotkają się obie piłki **(Odp.: piłki spotkają się po 5.6s od wyrzucenia pierwszej piłki 126.1m nad ziemią, pierwsza piłka będzie się wtedy poruszać się z prędkością 4.9m/s w dół, a druga 4.9m/s w górę)**
8. Do studni wrzucono wiadro, które spada swobodnie. Po upływie 2 sekund słychać plusk uderzającego o powierzchnię wody wiadra. Prędkość rozchodzenia się dźwięku wynosi 334m/s. Jak głęboka była studnia? **(Odp.:19.5 m)**
9. Z jaką prędkością należy rzucić poziomo kamień aby droga przebyta przez ten kamień była n razy większa od wysokości z jaki został on rzucony? **(Odp.:** $v = n\sqrt{(gh)/2}$ **)**
10. Z tego samego miejsca na wysokości h wystrzelono jednocześnie dwa pociski jedno do góry pod kątem α, a drugie do dołu pod takim samym kątem z taką samą prędkością v. Jak od czasu zależy odległość d między pociskami? **(Odp.:d=2·v·t·sinα)**
11. Pod jakim kątem do poziomu należy rzucić ciało, aby jego maksymalna wysokość była równa połowie jego zasięgu? **(Odp: tgα=2)**

12. Helikopter leci poziomo ze stałą prędkością 500km/h na wysokości 2km nad ziemią w kierunku celu do którego ma dostarczyć ładunek. Pod jakim kątem względem poziomu powinien być widoczny cel jeśli ładunek ma do niego trafić? **(Odp.: tgα=0.71)**
13. Z jaką prędkością rzucono poziomo kamień ze zbocza mającego nachylenie α do poziomu, jeśli kamień upadł na zbocze w odległości d od miejsca wyrzutu? **(Odp.:** $v = \sqrt{(gd\cos^2\alpha)/(2\sin\alpha)}$ **)**
14. Ciało porusza się po płaszczyźnie o kącie nachylenia $\alpha=30°$ w górę. Początkowa prędkość ciała wynosiła v=50m/s. Jak długo ciało będzie się poruszało w górę? **(Odp.: t=10.2s)**
15. Kula wystrzelona z karabinu przebija dwie równoległe kartki papieru oddalone od siebie o odległość L. Druga kartka została przebita d niżej niż pierwsza. Jaka była prędkość kuli? **(Odp.:** $v = L\sqrt{g/(2d)}$ **)**
16. Samochód wyścigowy po torze o promieniu krzywizny 200m. Jego przyspieszenie styczne wynosi a_t=1m/s^2. Oblicz przyspieszenie normalne a_n i przyspieszenie całkowite a samochodu w chwili gdy jego prędkość wynosi v=20m/s **(Odp.: a_n=2m/s^2, a=2.2m/s^2)**
17. Wiatrak poruszający się ruchem jednostajnie przyspieszonym wykonał 100 obrotów w ciągu 20s. Jaką prędkość kątową osiągnęły łopatki wiatraka po upływie 20s. Zakładamy, że w chwili początkowej łopatki wiatraka spoczywały. **(Odp. ω=10s^{-1})**
18. Dwie wskazówki zegara pokrywają się o godzinie 12.00. O której godzinie pokryją się ponownie? **(Odp.: O godzinie 13:05:27)**
19. Dwie tarcze wirują na wspólnej osi wykonując 3000 obrotów w ciągu minuty. Tarcze są umieszczone na osi w odległości 5cm. Równolegle do osi zostaje wystrzelony pocisk, który przebija obie tarcze. Otwór w drugiej traczy jest przesunięty kątowo względem otworu w pierwszej tarczy o kąt π/10. Jaka była prędkość pocisku? **(Odp.:500m/s)**
20. Kula wylatująca z lufy karabinu ma prędkość 1000m/s. Lufa karabinu jest wewnątrz nagwintowana tak, że kula wykonuje w niej jeden pełny obrót. Długość lufy wynosi 50cm. Jaki jest czas przelotu kuli wewnątrz lufy, jakie jest jej przyspieszenie kątowe, końcowa prędkość kątowa oraz częstość obrotów wewnątrz lufy? Zakładamy, że ruch kuli wewnątrz lufy jest ruchem jednostajnie przyspieszonym. **(Odp.: t=1/1000s,$\varepsilon=4\cdot10^6\pi s^{-2}$,$\omega=4\cdot10^3\pi s^{-1}$)**