PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Prąd elektryczny

Zadania z rozwiązaniami

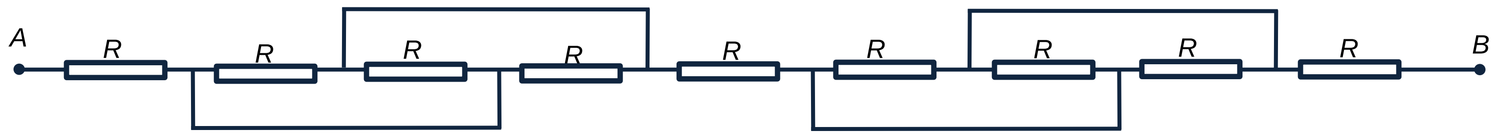
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

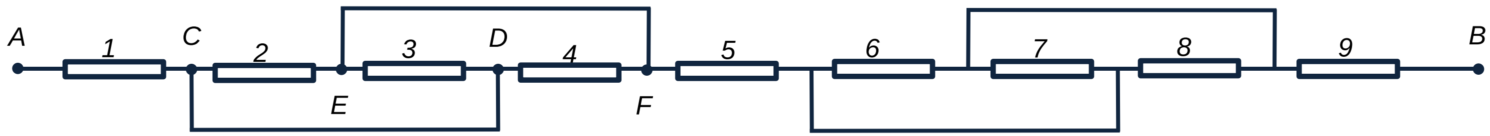
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

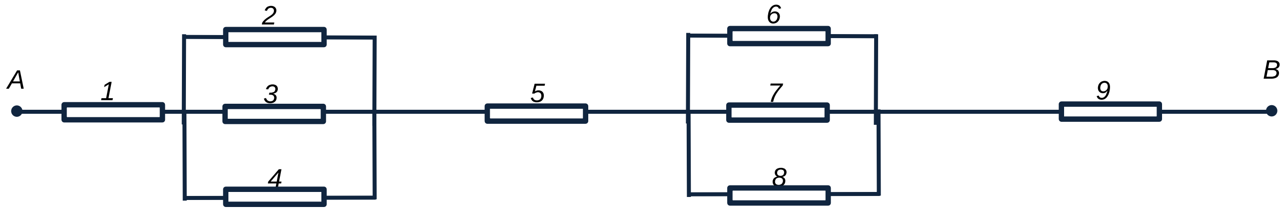
Obliczyć oporność układu dziewięciu jednakowych oporników o oporności R.



Rozwiązanie:



Punkty C i D połączone są bezpośrednio, więc potencjał w tych punktach jest równy i wynosi V_1. Podobnie potencjał w punktach E i F wynosi V_2. Wynika stąd, że napięcia na opornikach 2, 3 i 4 są równe, zatem oporniki te są połączone równolegle. Podobne rozumowanie prowadzi do ustalenia, że oporniki 6, 7 i 8 również są połączone równolegle. Układ możemy więc przedstawić w postaci:



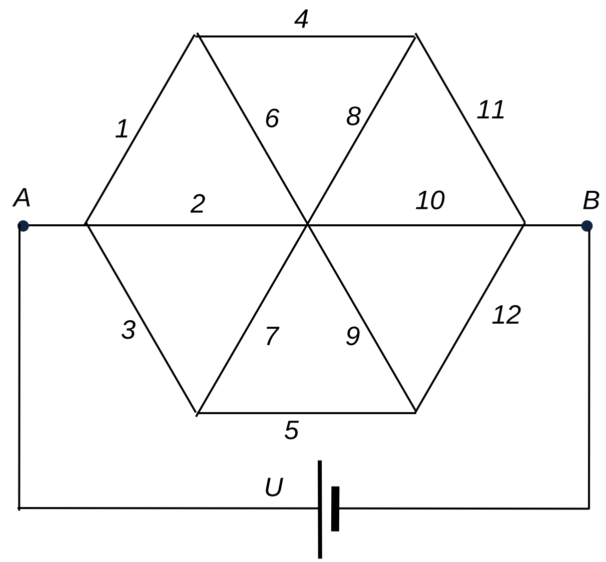
$$R_{AB} = R + \frac{R}{3} + R + \frac{R}{3} + R = \frac{11R}{3}$$

Zadanie 2

Z dwunastu odcinków drutu o długości a, średnicy d i oporze właściwym ρ wykonano obwód przedstawiony na rysunku i dołączono do niego źródło napięcia U. Obliczyć:

a) całkowitą moc wydzieloną w obwodzie,

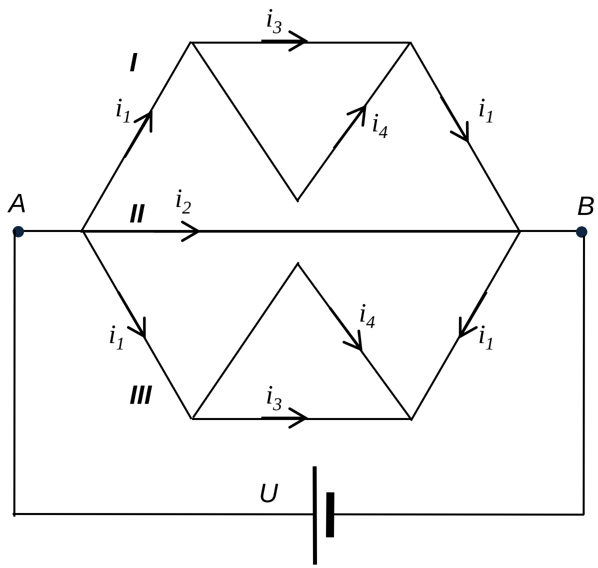
b) natężenia prądów w poszczególnych odcinkach obwodu.



Rozwiązanie:

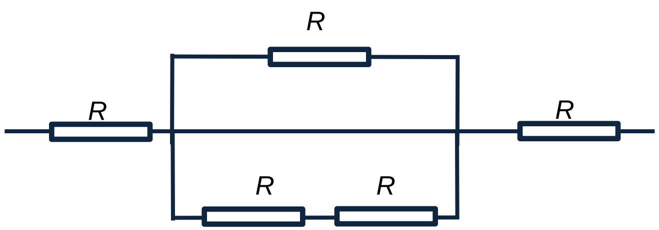
Oporność jednego odcinka wynosi: $R = \dfrac{\rho a}{S} = \dfrac{\rho a}{\pi d^2 / 4} = \dfrac{4\rho a}{\pi d^2}$

a) Aby obliczyć całkowitą moc wydzieloną w obwodzie, trzeba znaleźć całkowity opór układu przewodników. Korzystając z symetrii układu, można go przedstawić w postaci przedstawionej na rysunku poniżej, ponieważ rozłączenie w punkcie *O* nie zmienia natężeń prądów w poszczególnych odcinkach.



Po takim przekształceniu obwód składa się z trzech równoległych gałęzi ***I***, ***II*** i ***III***, w których płyną prądy o natężeniach i_1, i_2, i_2.

Oporność gałęzi ***I***:



$$R_1 = R + \frac{2R}{3} + R = \frac{8R}{3}$$

Oporność gałęzi ***II***:

$$R_2 = R + R = 2R$$

Oporność gałęzi ***III*** równa jest oporności gałęzi ***I***.

Oporność całego układu liczymy z równania:

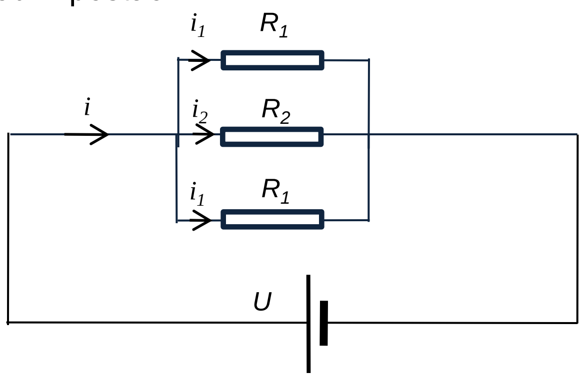
$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{3}{8R} + \frac{1}{2R} + \frac{3}{8R} = \frac{10}{8R}$$

$$R_{AB} = \frac{8R}{10} = \frac{8 \cdot 4a\rho}{10\pi d^2} = 3{,}2\frac{a\rho}{\pi d^2}$$

Moc wydzielona w układzie wynosi:

$$P = \frac{U^2}{R_{AB}} = \frac{U^2 \pi d^2}{3{,}2 \cdot a\rho}$$

b) W celu obliczenia natężeń prądów płynących przez poszczególne odcinki, korzystamy z praw Kirchhoffa, przedstawiając obwód w postaci:



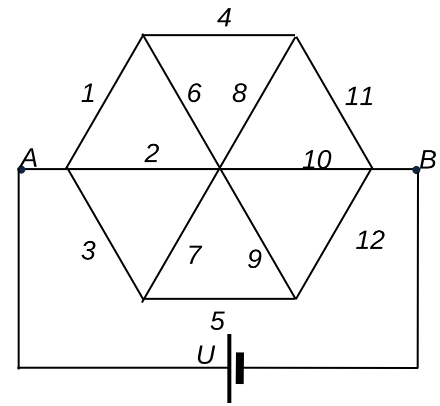
$$\begin{cases} i = 2i_1 + i_2 \\ i_1 R_1 = i_2 R_2 \end{cases} \Rightarrow \quad i_1 = \frac{iR_2}{R_1 + 2R_2}, \quad i_2 = \frac{iR_1}{R_1 + 2R_2}$$

Podstawiamy $i = \dfrac{U}{R_{AB}} = \dfrac{\pi U d^2}{3{,}2a\rho}$ i otrzymujemy:

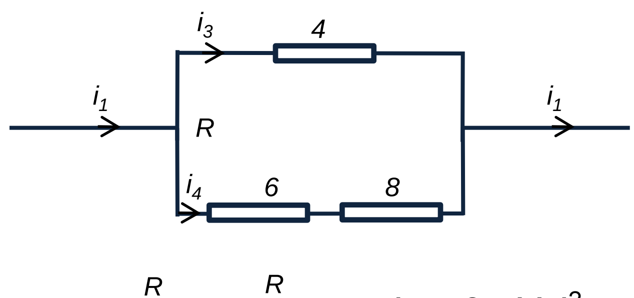
$$i_1 = \frac{\pi U d^2 R_2}{3{,}2a\rho\left(R_1 + 2R_2\right)} = \frac{3\pi U d^2}{32a\rho}$$

$$i_2 = \frac{\pi U d^2 R_1}{3{,}2a\rho\left(R_1 + 2R_2\right)} = \frac{\pi U d^2}{8a\rho}$$

Prąd o natężeniu i_1 płynie przez odcinki ***1*, *3*, *11*** i ***12***. Prąd o natężeniu i_2 płynie przez odcinki ***2*** i ***10***.



Aby obliczyć natężenie prądu w pozostałych odcinkach należy rozważyć prądy płynące w gałęzi ***I*** i ***III***.



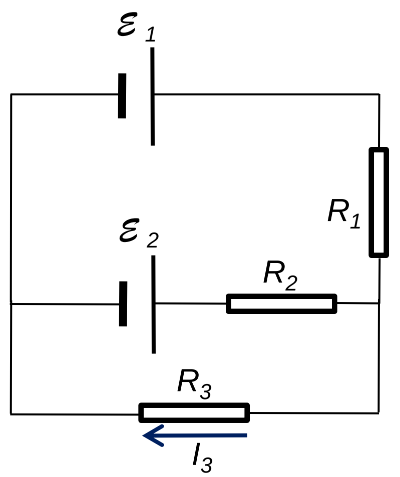
$$\begin{cases} i_1 = i_3 + i_4 \\ i_3 R = i_4 (2R) \end{cases} \Longrightarrow \quad i_4 = \frac{i_1}{4} = \frac{3\pi U d^2}{128 a\rho} \qquad i_3 = \frac{i_1}{2} = \frac{3\pi U d^2}{64 a\rho}$$

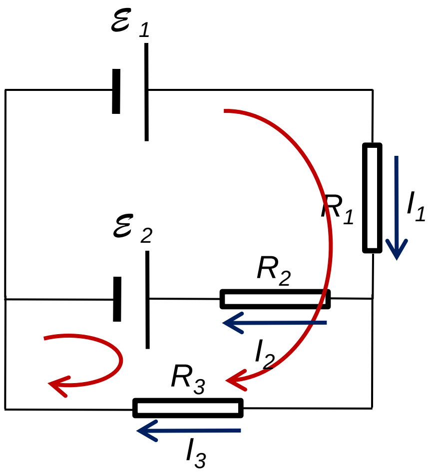
Prąd o natężeniu i_4 płynie przez odcinki ***6*, *7*, *8*** i ***9***.

Prąd o natężeniu i_3 płynie przez odcinki ***4*** i ***5***.

Zadanie 3.

W obwodzie na rysunku dane są siły elektromotoryczne: $\mathcal{E}_1$ = 12V, $\mathcal{E}_2$ = 10V, opory: R_1 = 10 Ω, R_2 = 20 Ω, R_3 = 5 Ω. Jakie jest natężenie prądu płynącego przez opór R_3?





Rozwiązanie: Oznaczamy natężenia prądów płynących przez oporniki i wybieramy kierunki obiegów w dwóch oczkach w celu zastosowania praw Kirchhoffa.

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = I_1 R_1 + I_3 R_3 \\ \mathcal{E}_2 = I_3 R_3 - I_2 R_2 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań otrzymujemy:

$$I_3 = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 0{,}4A$$

Zadanie 4.

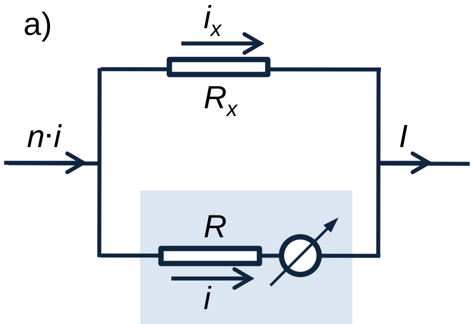
Amperomierz o oporności R ma zakres pomiarowy 0 – i.

a) Jaki opór i jak należy do niego dołączyć, aby zwiększyć zakres *n* razy?

b) Jaki opór i jak należy do niego dołączyć, aby mierzyć nim napięcie w zakresie 0 – U?

Rozwiązanie:

a)



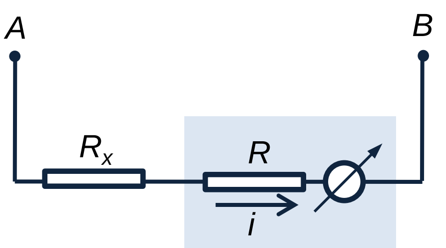
Chcemy mierzyć amperomierzem prąd $n \cdot i$, ale przez amperomierz nie może popłynąć prąd większy niż *i.* Musimy do amperomierza dołączyć równolegle opornik R_x, przez który popłynie prąd:

$$i_x = n \cdot i - i = (n-1)i$$

z drugiego prawa Kirchhoffa: $i_x R_x = iR$

$$R_x = \frac{iR}{i_x} = \frac{iR}{(n-1)i} = \frac{R}{(n-1)}$$

b)



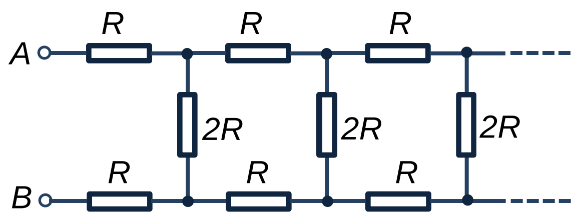
Aby zamienić amperomierz na woltomierz, trzeba zwiększyć całkowity opór miernika, a więc dołączyć do niego szeregowo oporność R_x. Gdy przyłożymy do punktów *A* i *B* maksymalne napięcie *U*, przez miernik powinien płynąć maksymalny prąd o natężeniu *i*.

$$U = iR + iR_x$$

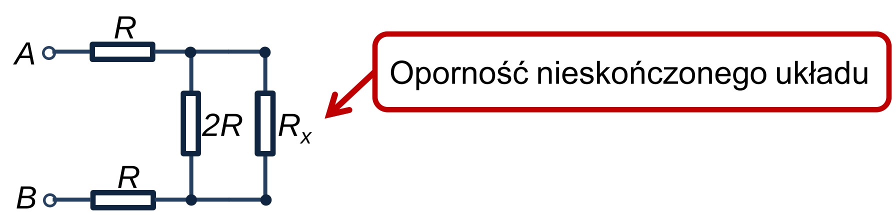
$$R_x = \frac{U - iR}{i} = \frac{U}{i} - R$$

Zadanie 5.
Znaleźć całkowity opór nieskończonego układu oporników przedstawionego na rysunku. Napięcie przyłożono do punktów *A* i *B*.

Rozwiązanie:



Zauważmy, że gdy z tego układu odłączymy 3 pierwsze oporniki (R, R i $2R$), to układ pozostanie niezmieniony – nadal będzie zawierał nieskończenie wiele oporników. Przedstawmy więc układ w postaci:



Opory $2R$ i R_x połączone są równolegle, więc ich oporność zastępczą R' obliczamy ze wzoru:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R_x} \qquad\qquad R' = \frac{2RR_x}{2R + R_x}$$

Oporność między punktami *A* i *B* wynosi również R_x. Możemy więc skorzystać ze wzoru na oporność zastępczą oporników połączonych szeregowo:

$$R_x = R + R' + R = 2R + \frac{2RR_x}{2R + R_x}$$

Przekształcając to wyrażenie otrzymujemy równanie kwadratowe:

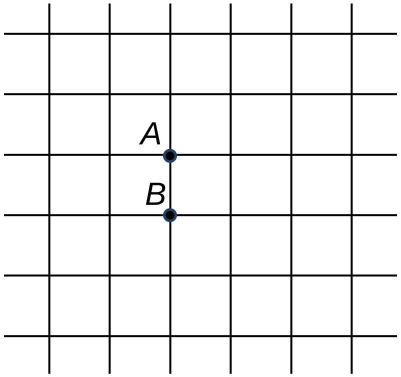
$$R_x^2 - 2RR_x - 4R = 0$$

Nieujemne rozwiązanie tego równania:

$$R_x = R\left(1 + 2\sqrt{5}\right)$$

Ujemne rozwiązanie odrzucamy, jako pozbawione sensu fizycznego – oporność może być tylko dodatnia.

Zadanie 6.
Nieskończenie rozległa siatka wykonana jest z drutu o oporności właściwej ρ i średnicy *d*. Oczko siatki to kwadrat o boku *a*. Jaka jest oporność siatki, jeśli podłączymy ją do źródła prądu w punktach *A* i *B* (rysunek)?



Rozwiązanie:
Oporność jednego boku kwadratu wynosi:

$$R = \frac{\rho a}{S} = \frac{\rho a}{\pi d^2 / 4} = \frac{4\rho a}{\pi d^2}$$

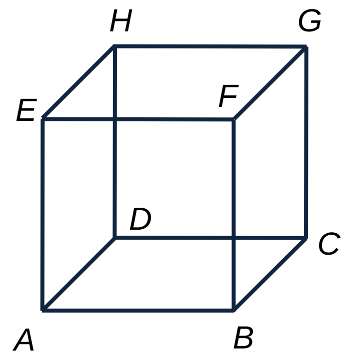
Aby obliczyć całkowitą oporność układu, należy założyć, że do punktów *A* i *B* podłączono napięcie *U* i obliczyć całkowite natężenie prądu wpływające do punktu *A* i wypływające z punktu *B.*

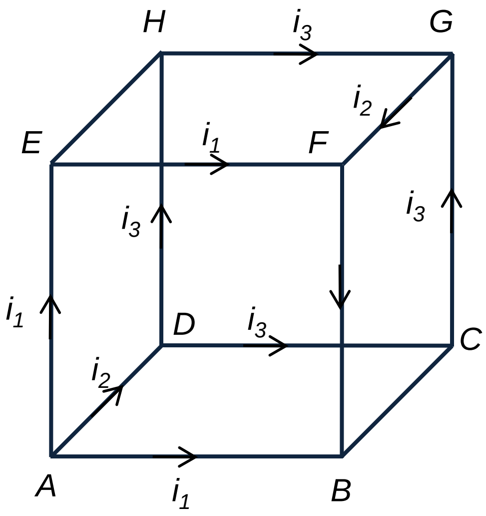
Ze względu na symetrię układu prąd o natężeniu *i* wpływający do punktu *A* rozdziela się na jednakowe prądy o natężeniu równym *i*/4. Podobnie prądy spływający z całej sieci do punktu *B* muszą mieć równe natężenia *i*/4. Na odcinku od punktu *A* do *B* płynie prąd, który jest sumą prądu wpływającego do sieci i spływającego z całej sieci, z których oba równe są *i*/4.
Całkowity prąd płynący między punktami *A* i *B* wynosi więc *i*/2.
Oporność całej sieci obliczymy ze wzoru:

$$U = R_x \cdot i = R \cdot \frac{i}{2}$$

$$R_x = \frac{R}{2} = \frac{2\rho a}{\pi d^2}$$

Zadanie 7. Z drutu zbudowano sześcian. Opór każdej krawędzi sześcianu wynosi *R*. Oblicz opór całkowity sześcianu, jeśli napięcie przyłożono do wierzchołków *AF*.





Rozwiązanie:
Prąd o natężeniu *i* wpływający do punktu *A* rozdziela się na prądy: i_1, i_1, i_2.

$$i = 2i_1 + i_2 \qquad (1)$$

Dla węzła *D* możemy zapisać: $i_2 = 2i_3$

Prąd płynący na odcinku *GF* jest taki sam jak na odcinku *AD* równy i_2. – wynika to z symetrii układu. Podobnie równe są prądy na odcinkach *HG* i *CG*. Każdy z nich jest równy połowie prądu i_2, a więc równy jest i_3.
Aby wyznaczyć prąd płynący przez odcinek *EH*, zastosujmy I prawo Kirchhoffa dla węzła *H*. $i_{EH} + i_3 = i_3 \rightarrow i_{EH} = 0$

Podobnie prąd nie płynie przez odcinek *BC*.

Napięcie między punktami *A* i *F* jest jednakowe, bez względu na to czy obliczymy je wzdłuż linii *AEF* czy *ADHGF*.
Otrzymamy więc równanie: $2i_1R = 2i_2R + 2i_3R$

czyli: $i_1 = i_2 + i_3$

Rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ i_2 = 2i_3 \end{cases}$$

Otrzymujemy: $i_2 = \frac{2}{3}i_1$ $\qquad$ $i_3 = \frac{1}{3}i_1$

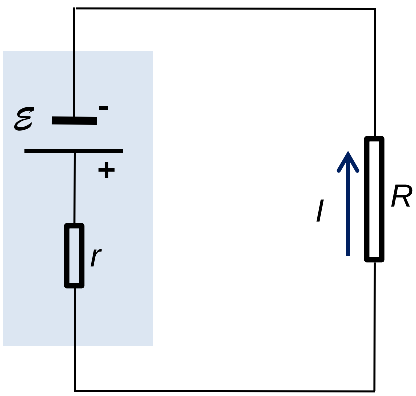
Podstawiamy te wartości do równania (1) i otrzymujemy: $i_1 = \frac{3}{8}i$

Oporność zastępczą między punktami *A* i *F* obliczamy ze wzoru:

$$R_{AF} = \frac{U}{i} = \frac{2i_1R}{i} = \frac{3}{4}R$$

Zadanie 8. Jaką maksymalną moc można uzyskać na oporze zewnętrznym podłączonym do źródła prądu o sile elektromotorycznej $\mathcal{E}$ i oporze wewnętrznym r ?

Rozwiązanie:



Moc wydzielaną na oporze zewnętrznym R wyrażamy wzorem:

$$P = I^2 R$$

Natężenie prądu wyznaczamy z równania:

$$\mathcal{E} = I(R + r)$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

Moc jest więc funkcją oporu zewnętrznego: $P = \dfrac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}$

Aby wyznaczyć moc maksymalną, należy znaleźć maksimum tej funkcji, przyrównując pochodną względem R do zera.

$$\frac{dP}{dR} = \frac{\mathcal{E}^2 (R + r)^2 - 2R\mathcal{E}^2 (R + r)}{(R + r)^4} = 0$$

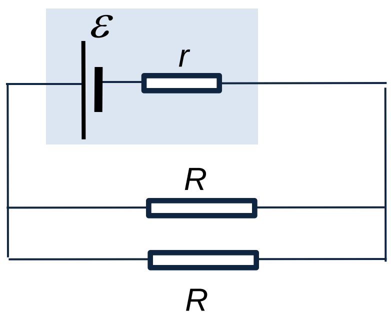
…skąd wyznaczamy warunek na moc maksymalną: $R = r$

Moc maksymalna wynosi: $P = \dfrac{\mathcal{E}^2 r}{(2r)^2} = \dfrac{\mathcal{E}^2}{4r}$

Zadanie 9. Jaki warunek musi spełniać oporność R, aby w układzie dwóch jednakowych oporników *R* wydzieliła się taka sama moc po podłączeniu ich do źródła prądu o oporze wewnętrznym *r* , bez względu na to, czy oporniki połączymy szeregowo, czy równolegle?

Rozwiązanie:

Połączenie równoległe



Oporność zewnętrzna: $R_z = \frac{R}{2}$

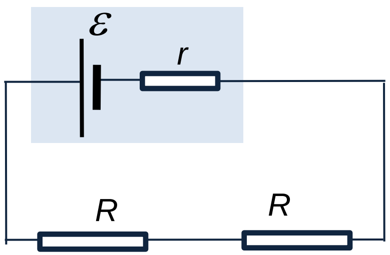
Moc wydzielaną na układzie oporników: $P = I_1^2 \frac{R}{2}$

Natężenie prądu wyznaczamy z równania:

$$\mathcal{E} = I_1\left(\frac{R}{2} + r\right) \Rightarrow I_1 = \frac{2\mathcal{E}}{R + 2r}$$

Moc: $P = \left(\frac{2\mathcal{E}}{R + 2r}\right)^2 \frac{R}{2}$

Połączenie szeregowe



Oporność zewnętrzna: $R_z = 2R$

Moc wydzielaną na układzie oporników: $P = 2I_2^2 R$

Natężenie prądu wyznaczamy z równania:

$$\mathcal{E} = I_2(2R + r) \Rightarrow I_2 = \frac{\mathcal{E}}{2R + r}$$

Moc: $P = 2R\left(\frac{\mathcal{E}}{2R + r}\right)^2$

Przyrównujemy wartość mocy w obu przypadkach: $$2R\left(\frac{\mathcal{E}}{2R + r}\right)^2 = \left(\frac{2\mathcal{E}}{R + 2r}\right)^2 \frac{R}{2}$$

Skąd mamy: $R = r$

Zadanie 10.

Żarówka o oporności R zasilana jest baterią o sile elektromotorycznej $\mathcal{E}_1$ i oporze wewnętrznym r_1. Jaki warunek musi być spełniony, aby moc wydzielana w żarówce wzrosła, gdy szeregowo włączymy do obwodu jeszcze jedną baterię?

Rozwiązanie:
Początkowa moc żarówki wyraża się wzorem:

$$P_1 = i_1^2 R = \frac{\mathcal{E}_1^2 R}{(R + r_1)^2}$$

Po dołączeniu drugiej baterii o sile elektromotorycznej $\mathcal{E}_2$ i oporze wewnętrznym r_2 moc wynosi:

$$P_2 = i_2^2 R = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2 R}{(R + r_1 + r_2)^2}$$

Moc w drugim przypadku będzie większa jeśli:

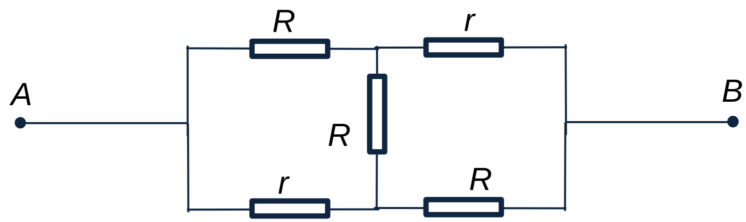
$$\frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2 R}{(R + r_1 + r_2)^2} > \frac{\mathcal{E}_1^2 R}{(R + r_1)^2}$$

Musi być więc spełniony warunek:

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} > \frac{r_2}{R + r_1}$$

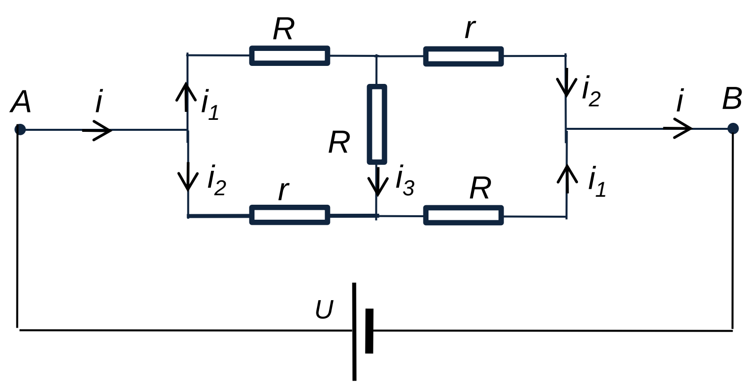
Zadanie 11

Obliczyć oporność układu oporników przedstawionego na rysunku.



Rozwiązanie:

Przedstawiony układ stanowi przykład układu oporników, które nie są połączone ani szeregowo, ani równolegle. Aby obliczyć oporność układu należy założyć, że układ podłączono do źródła napięcia *U* i obliczyć natężenia prądów płynących przez oporniki. Z symetrii układu wynika, że przez jednakowe oporniki płyną prądy o jednakowym natężeniu. Zakładamy, że przez środkowy opornik płynie prąd i_3 w takim kierunku, jak zaznaczono na rysunku.



Z I prawa Kirchhoffa:

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Z II prawa Kirchhoffa dla oczka zawierającego punkty *A* i *B* oraz źródło napięcia:

$$i_1 R + i_2 r - U = 0$$

Z II prawa Kirchhoffa dla oczka zawierającego punkt *A* i środkowy opornik:

$$i_1 R + i_3 R - i_2 r = 0$$

Z powyższego układu równań można obliczyć natężenia prądów płynących przez oporniki.

$$i_1 = \frac{U(r+R)}{R(R+3r)} \qquad i_2 = \frac{2U}{(R+3r)} \qquad i_3 = \frac{U(r-R)}{R(R+3r)}$$

Natężenie prądu płynącego przez układ:

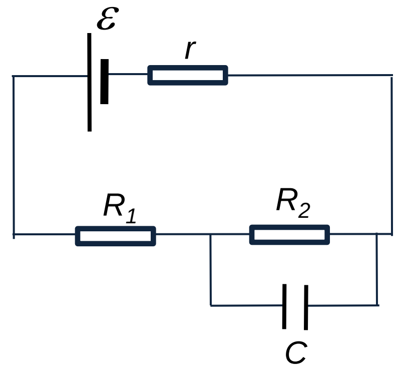
$$i = i_1 + i_2 = \frac{U(3R+r)}{R(R+3r)}$$

Oporność układu oporników:

$$R_{AB} = \frac{U}{i} = \frac{R(R+3r)}{(3R+r)}$$

Zadanie 12

Obliczyć ładunek na kondensatorze o pojemności *C*. Dane są opory oporników R_1, R_2, siła elektromotoryczna $\mathcal{E}$ i opór wewnętrzny ogniwa *r*.



Rozwiązanie:

Napięcie na kondensatorze równe jest napięciu na oporniku R_2, które obliczymy korzystając z II prawa Kirchhoffa.

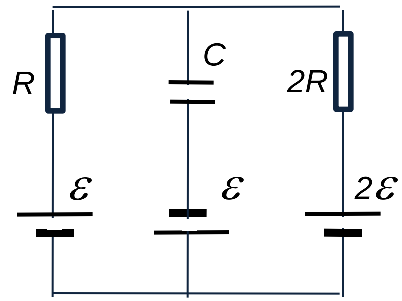
$$iR_1 + iR_2 + ir_3 = \mathcal{E}$$

Natężenie prądu płynącego w obwodzie wynosi: $$i = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r_3}$$

Napięcie na oporniku R_2 i kondensatorze: $$U = iR_2 = \frac{\mathcal{E}R_2}{R_1 + R_2 + r_3}$$

Ładunek na kondensatorze: $$Q = CU = \frac{\mathcal{E}R_2C}{R_1 + R_2 + r_3}$$

Zadanie 13
Obliczyć energię zgromadzoną na kondensatorze w obwodzie przedstawionym na rysunku.



Rozwiązanie:

II prawo Kirchhoffa dla oczka zawierającego kondensator i opornik o oporze R. Napięcie na kondensatorze oznaczamy U.

$$-iR + U = 2\mathcal{E}$$

II prawo Kirchhoffa dla oczka zawierającego oba oporniki.

$$iR + i \cdot 2R = 2\mathcal{E} - \mathcal{E}$$

Z drugiego równania obliczamy natężenie prądu płynącego przez oporniki i następnie z pierwszego równania - napięcie na kondensatorze.

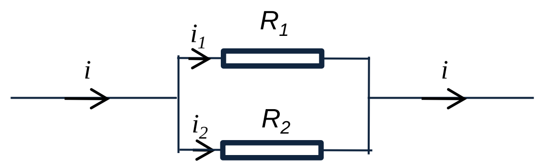
$$i = \frac{\mathcal{E}}{3R} \qquad U = \frac{7\mathcal{E}}{3}$$

Energia kondensatora:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{1}{2}C\left(\frac{7\mathcal{E}C}{3}\right)^2 = \frac{49C^3\mathcal{E}^2}{18}$$

Zadanie 14

Wykazać, że drugie prawo Kirchhoffa dla oczka pokazanego na rysunku jest równoważne warunkowi najmniejszych strat energetycznych w obwodzie.



Rozwiązanie:

Całkowita moc wydzielana w układzie na rysunku:

$$P = i_1^2 R_1 + i_2^2 R_2 = i_1^2 R_1 + \left(i - i_1^2\right) R_2$$

Aby znaleźć warunek na minimum mocy, należy pochodną $\dfrac{dP}{di_1}$ przyrównać do zera.

$$\frac{dP}{di_1} = 2 i_1 R_1 - 2\left(i - i_1\right) R_2 = 0$$

skąd:

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \qquad\qquad i_2 = i - i_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

Eliminując z tych równań *i* otrzymujemy prawo Kirchhoffa dla oczka przedstawionego na rysunku:

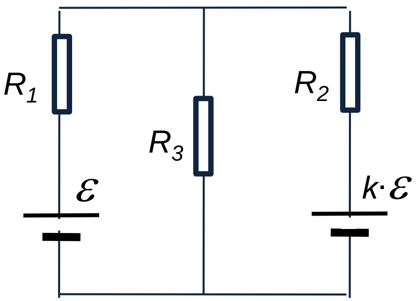
$$i_1 = \frac{R_2}{R_1} i_2 \quad \rightarrow \quad i_1 R_1 - i_2 R_2 = 0$$

Zadanie 15

Dwie baterie o siłach elektromotorycznych $\mathcal{E}$ i $k\cdot\mathcal{E}$ połączono z trzema opornikami R_1, R_2 i R_3 w układ przedstawiony na rysunku. Jaki warunek muszą spełniać pozostałe opory, aby:

a) przez opór R_1, nie płynął prąd?
b) przez opór R_2, nie płynął prąd?
c) przez opór R_3, nie płynął prąd?

Opory wewnętrzne baterii przyjąć równe zeru. Stała k jest większa od 1.



Rozwiązanie:

a) Prąd płynący przez oporniki R_2 i R_3 jest jednakowy. Prawo Kirchhoffa dla lewego i prawego oczka:

$$iR_3 = \mathcal{E} \qquad\qquad iR_2 + iR_3 = k\cdot\mathcal{E}$$

skąd: $$\frac{\mathcal{E}}{R_3}\left(R_2 + R_3\right) = k\cdot\mathcal{E}$$

Warunek na R_2 i R_3 : $$\frac{R_2}{R_3} = k - 1$$

b) Prąd płynący przez oporniki R_1 i R_3 jest jednakowy. Prawo Kirchhoffa dla lewego i prawego oczka:

$$iR_3 = k \cdot \mathcal{E} \qquad\qquad iR_2 + iR_3 = \mathcal{E}$$

skąd: $$\frac{k \cdot \mathcal{E}}{R_3}(R_2 + R_3) = \mathcal{E}$$

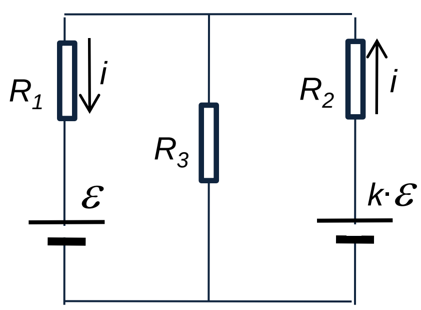
Prowadzi to do równania sprzecznego: $\frac{R_2}{R_3} = \frac{1}{k} - 1$ (Prawa strona równania ujemna, lewa strona dodatnia)

Prąd płynący przez R_2 **nie jest równy zeru** dla żadnej wartości oporów R_1 i R_3

c) Prąd płynący przez oporniki R_1 i R_2 jest jednakowy.

Prawo Kirchhoffa dla oczka zawierającego obie baterie:

$$i(R_1 + R_2) = k \cdot \mathcal{E} - \mathcal{E}$$



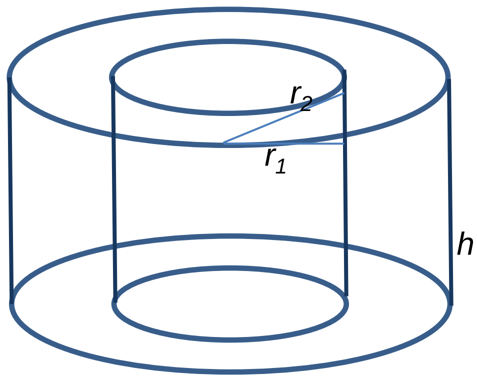
Prawo Kirchhoffa dla oczka zawierającego tylko baterię $k{\cdot}\mathcal{E}$
:

$$iR_2 = k \cdot \mathcal{E}$$

skąd: $$\frac{\mathcal{E}}{R_2}(R_1 + R_2) = (k - 1)\mathcal{E}$$

Warunek na R_1 i R_2 : $$\frac{(R_1 + R_2)}{R_2} = \frac{k - 1}{k}$$

Zadanie 16
Przez elektrolit wypełniający naczynie w kształcie kwadratu o boku a pod wpływem przyłożonego napięcia U płynie prąd o natężeniu i. Jaki opór ma ten elektrolit wypełniający naczynie zrobione z dwóch współosiowych metalowych walców o promieniach r_1 i r_2? Wysokość naczynia wynosi *h.*



Rozwiązanie:

Najpierw trzeba wyznaczyć opór właściwy elektrolitu:

$$\frac{U}{i} = \frac{\rho a}{a^2} \qquad \text{skąd:} \qquad \rho = \frac{Ua}{i}$$

Aby obliczyć opór elektrolitu w cylindrycznym naczyniu, należy najpierw wyznaczyć opór d*R* warstwy zawartej między walcami o promieniach *r* i *r* + d*r*:

$$dR = \frac{\rho dr}{2\pi rh}$$

Całkowity opór jest równy całce względem *r* w granicach od r_1 do r_2

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho dr}{2\pi rh} = \frac{\rho}{2\pi h} ln\frac{r_2}{r_1}$$

Zadanie 17
Wykaż, że moc prądu wydzielona w przewodniku jest wprost proporcjonalna do energii pola elektrycznego zgromadzonej w przewodniku.

Rozwiązanie:

Na końcach przewodnika jest przyłożone napięcie *U*, zakładamy, że pole w przewodniku jest jednorodne, pole przekroju poprzecznego przewodnika wynosi *S*, jego długość *d*.

Moc prądu wynosi:

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{E^2 d^2}{R}$$

Oporność *R* można wyrazić: $R = \frac{\rho d}{S}$

więc: $P = \frac{E^2 S d}{\rho} = \frac{E^2 V}{\rho}$ gdzie *V* jest objętością przewodnika.

Energię pola elektrycznego otrzymamy, mnożąc gęstość energii pola przez objętość.

$$W = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot V$$

Porównując powyższe wzory, otrzymujemy:

$$P = \frac{2}{\varepsilon_0 \rho} \cdot W$$

Wykazaliśmy, że moc prądu wydzielona w przewodniku jest wprost proporcjonalna do energii pola elektrycznego zgromadzonej w przewodniku a współczynnik proporcjonalności wynosi $\frac{2}{\varepsilon_0 \rho}$

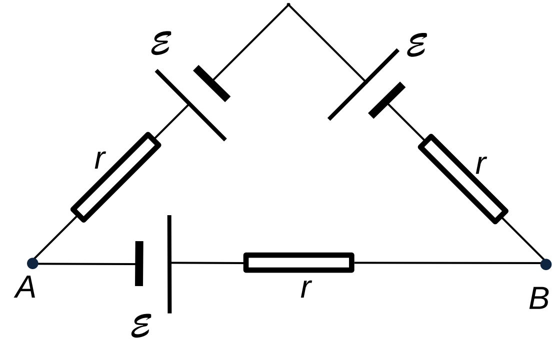
Zadanie 18

Trzy baterie o jednakowych siłach elektromotorycznych $\mathcal{E}$ i jednakowych oporach wewnętrznych *r* połączono w trójkąt (rysunek).

a) Jakie jest napięcie między punktami *A* i *B*?

b) Jaki prąd popłynie przez opornik *R* podłączony do punktów *A* i *B*?

c) Jakie napięcie będzie między punktami *A* i *B*, gdy podłączymy do nich opornik *R*?



Rozwiązanie:

a) Napięcie między punktami *A* i *B* wynosi:

$$U_{AB} = \mathcal{E} - ir$$

gdzie *i* jest natężeniem prądu płynącego w obwodzie, które wyznaczymy korzystając z drugiego prawa Kirchhoffa .

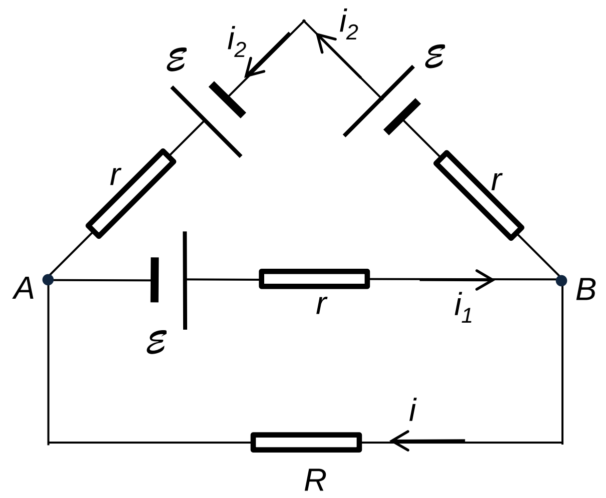
$$3ir = 3\mathcal{E} \rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{r}$$

Czyli $U_{AB} = 0$

Zerowanie się napięcia między dowolnymi dwoma wierzchołkami trójkąta wynika z symetrii układu.

b) Włączenie opornika do układu zaburza symetrię. Przez baterię nie płyną już prądy o jednakowym natężeniu.

Zapiszmy prawa Kirchhoffa:



$$\begin{cases} i_1 = i + i_2 \\ \mathcal{E} = iR + i_1 r \\ 3\mathcal{E} = i_1 r + 2 i_2 r \end{cases}$$

Z układu równań obliczamy *i*: $i = -\dfrac{2\varepsilon}{R}$

Uwaga! Ujemna wartość natężenia prądu oznacza, że prąd płynie w przeciwnym kierunku niż zaznaczono na rysunku.

c) Napięcie między punktami *A* i *B* wynosi: $U_{AB} = iR = 2\mathcal{E}$

Zadanie 19

Jaka jest prędkość unoszenia (prędkość dryfu) elektronów w przewodniku miedzianym o średnicy d =1,63 mm przez który płynie prąd o natężeniu i =10A. Porównać z prędkością termiczną elektronów w temperaturze pokojowej.

Rozwiązanie:

Prędkość unoszenia v_u wyznaczymy ze wzoru na gęstość prądu j:

$$j = env_u$$

koncentracja elektronów $n = 8{,}4 \cdot 10^{22} \frac{1}{cm^3}$

ładunek elektronu $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C$

masa elektronu $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31} kg$

$$j = \frac{I}{S} = \frac{4I}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 10A}{0{,}0208 cm^2} = 479{,}5 \frac{A}{cm^2}$$

$$v_u = \frac{j}{e \cdot n} = 3{,}6 \cdot 10^{-2} \frac{cm}{s}$$

Prędkość termiczną $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ (prędkość średnią kwadratową) wyznaczymy z równania:

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$$

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1{,}1 \cdot 10^7 \frac{cm}{s}$$

Prędkość unoszenia jest prawie miliard razy mniejsza niż prędkości termiczne elektronów.

Zadanie 20

W drucie miedzianym o średnicy d = 2 mm płynie prąd o natężeniu i = 0,55 A pod wpływem pola elektrycznego o natężeniu $E = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ V/cm.

Obliczyć:

a) koncentrację elektronów

b) prędkość unoszenia elektronów

c) oporność właściwą miedzi

Masa atomowa miedzi wynosi A = 63,6 a gęstość $\rho = 8960$ kg/m^3

Rozwiązanie:

a) Koncentracja to liczba elektronów swobodnych w jednostce objętości. Ponieważ miedź jest jednowartościowa, liczba elektronów swobodnych jest równa liczbie atomów.

$$n = \frac{N_A}{V}$$ gdzie $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\, mol^{-1}$ to liczba Avogadro

Objętość V zajmowaną przez 1 mol obliczymy ze wzoru na gęstość:

$$\rho = \frac{A}{V} \rightarrow V = \frac{A}{\rho}$$

A to masa 1 mola

skąd: $$n = \frac{N_A \rho}{A} = 8{,}5 \cdot 10^{28}\, m^{-3}$$

b) Prędkość unoszenia v_u wyznaczymy ze wzoru na gęstość prądu j:

$$j = env_u$$

gdzie $$j = \frac{i}{S} = \frac{4i}{\pi d^2}$$

skąd: $$v_u = \frac{4i}{\pi d^2 en} = \frac{4iA}{\pi d^2 N_A \rho} = 1{,}3 \cdot 10^{-5}\,\frac{m}{s}$$

c) Oporność właściwą miedzi wyznaczymy ze wzoru:

$$R = \frac{\rho l}{S} \rightarrow \rho = \frac{RS}{l}$$ gdzie l jest długością drutu

$$R = \frac{U}{i} = \frac{El}{i}$$

$$\rho = \frac{RS}{l} = \frac{ElS}{il} = \frac{ES}{i} = \frac{\pi d^2 E}{4i} = 1{,}72 \cdot 10^{-8}\,\Omega m$$

Zadanie 21

Miedziany drut o średnicy 1mm służy do zasilania żarówki o mocy 200W prądem o natężeniu 1.67A. Gęstość elektronów przewodnictwa wynosi $n=8.5\cdot 10^{28} m^{-3}$. Znajdź gęstość prądu oraz prędkość unoszenia.

Aby wyznaczyć gęstość prądu J musimy obliczyć pole przekroju poprzecznego drutu S:

$$S=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2=\pi\left(\frac{0.001m}{2}\right)^2=7.9\cdot 10^{-7}m^2$$

Gęstość prądu wynosi więc:

$$J=\frac{I}{S}=\frac{1.67A}{7.9\cdot 10^{-7}m^2}=2.1\cdot 10^6 A/m^2$$

Prędkość unoszenia v_d jest szybkością ruchu elektronów w przewodniku. Jest ona związana z gęstością prądu przez zależność:

$$J=n|q|v_d$$

Z powyższego związku możemy wyznaczyć szukaną wielkość:

$$v_d=\frac{J}{n|q|}=\frac{2.1\cdot 10^6 A/m^2}{8.5\cdot 10^{28}m^{-3}\cdot 1.6\cdot 10^{-19}C}=1.5\cdot 10^{-4}m/s=0.15mm/s$$

Zadanie 22

Dla drutu miedzianego o średnicy 1mm przez który płynie prąd o natężeniu 1.67A. Oblicz wartość natężenia pola E wewnątrz drutu, różnicę potencjałów między dwoma punktami drutu odległymi o 25m od siebie oraz opór 25 metrowego odcinka drutu (opór właściwy miedzi wynosi $1.72 \cdot 10^{-8} \Omega m$).

Oporność właściwa materiału jest zdefiniowana jako stosunek natężenia pola elektrycznego do gęstości prądu w materiale: ρ=E/J. Tak więc natężenie pola elektrycznego można obliczyć mnożąc gęstość prądu (obliczoną w poprzednim zadaniu) przez znaną wartość oporu właściwego miedzi:

$$E = \rho J = 1.72 \cdot 10^{-8} \Omega m \cdot 2.1 \cdot 10^{6} A/m^{2} = 3.6 \cdot 10^{-2} V/m$$

Różnica potencjałów między dwoma punktami odległymi o L=25m jest równa:

$$\Delta V = EL = 3.6 \cdot 10^{-2} V/m \cdot 25m = 0.9V$$

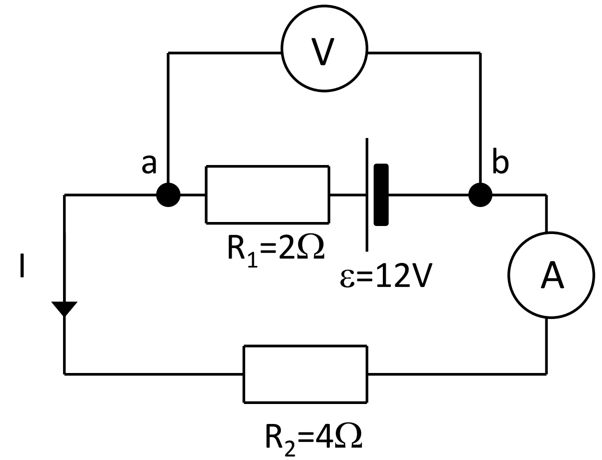
Opór 25 metrowego odcinka drutu można wyznaczyć z prawa Ohma obliczając stosunek różnicy potencjałów między końcami odcinka do natężenia prądu w nim płynącego:

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{0.9V}{1.67A} = 0.54\Omega$$

Zadanie 23

Dla układu z rysunku oblicz wskazania woltomierza oraz amperomierza.

Woltomierz służy do pomiaru napięcia elektrycznego (różnicy potencjału) i w idealnym przypadku ma nieskończenie duży opór tzn. nie płynie przez niego prąd. Amperomierz mierzy natężenie płynącego przez niego prądu. Idealny amperomierz ma zerowy opór elektryczny.
Prąd I płynący w obwodzie i mierzony przez amperomierz możemy obliczyć z prawa Ohma. Prąd ten jest równy stosunkowi napięcia generowanego przez baterię (siły elektromotorycznej ε) do całkowitego oporu obwodu. W obwodzie znajdują się dwa opory połączone szeregowo, więc całkowity opór obwody jest ich sumą:



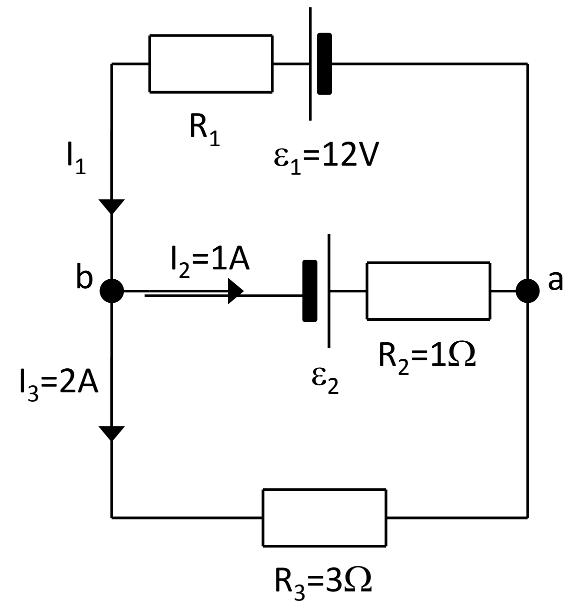
$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} = \frac{12V}{2\Omega + 4\Omega} = 2A$$

Napięcie mierzone przez woltomierz jest różnicą potencjałów między punktami a i b. Różnica ta jest równa sile elektromotorycznej baterii pomniejszonej o spadek napięcia na oporniku 2Ω (drugie prawo Kirchhoffa) :

$$\Delta V = \varepsilon - IR_1 = 12V - 2A \cdot 2\Omega = 12V - 4V = 8V$$

Zadanie 21

Akumulator generujący siłę elektromotoryczną ε_1=12V o nieznanym oporze wewnętrznym R_1 jest podłączony do drugiego, rozładowanego akumulatora o nieznanej sile elektromotorycznej ε_2 i oporze wewnętrznym R_2=1Ω oraz do żarówki sygnalizującej ładowanie która ma opór R_3=3Ω i przez którą płynie prąd I_3=2A (rysunek). Przez rozładowany akumulator płynie prąd I_2=1A w kierunku zaznaczonym na rysunku. Znajdź wartość prądu I_1 płynącego przez działający akumulator, jego opór wewnętrzny R_1 oraz siłę elektromotoryczną ε_2.



Aby obliczyć prąd I_1 możemy zastosować pierwsze prawo Kirchhoffa dla któregoś z węzłów a lub b. Dla węzła b możemy napisać:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \qquad \text{czyli:} \quad I_1 = I_2 + I_3 = 1A + 2A = 3A$$

Stosując drugie prawo Kirchhoffa dla dużego obwodu (zawierającego ε_1, R_1 i R_3) możemy obliczyć R_1:

$$\varepsilon_1 - I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0$$

z czego mamy:

$$R_1 = \frac{\varepsilon_1 - I_3 R_3}{I_1} = \frac{12V - 2A \cdot 3\Omega}{3A} = \frac{6V}{3A} = 2\Omega$$

Podobnie stosując drugie prawo Kirchhoffa dla obwodu zawierającego ε_2, R_2 i R_3) możemy obliczyć ε_2:

$$-\varepsilon_2 + I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0 \qquad \text{czyli:} \quad \varepsilon_2 = I_2 R_2 - I_3 R_3 = 1A \cdot 1\Omega - 2A \cdot 2\Omega = 1V - 6V = -5V$$

Zadanie 24

Znajdź wyrażenia na składową rzeczywistą (konduktancję *G*) i urojoną (susceptancję *B*) admitancji *Y* dla elementu o impedancji $Z = R + jX$.

Rozwiązanie

$$\boxed{\overline{Z} = R + jX}$$

impedancja **rezystancja** **reaktancja**

$$\boxed{\overline{Y} = G + jB}$$

admitancja **konduktancja** **susceptancja**

Obliczamy admitancję jako odwrotność impedancji i usuwamy liczbę urojoną j z mianownika:

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{1}{R + jX} \cdot \frac{R - jX}{R - jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2}$$

Pamiętając, że część rzeczywista admitancji stanowi konduktancję, a część urojona – susceptancję, otrzymujemy:

$$\overline{Y} = G + jB = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

$$B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

Zadanie 25

Ile wynosi impedancja opornika o oporze *R*, kondensatora o pojemności *C* i cewki o indukcyjności *L* dla prądu przemiennego o częstości kołowej ω?

Rozwiązanie

impedancja → $$\boxed{\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}}$$ ← **napięcie** (zespolone), **natężenie prądu** (zespolone)

Natężenie prądu przemiennego o amplitudzie I_0 i częstości kołowej ω możemy zapisać w postaci zespolonej jako:

$$\bar{I}(t) = I_0 \exp(j\omega t)$$

Zależność napięcia i natężenia prądu dla opornika, kondensatora i cewki są następujące:

$$\bar{U}_R = R\bar{I} \qquad \bar{U}_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int \bar{I}(t)dt \qquad \bar{U}_L = L\frac{d\bar{I}(t)}{dt}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\bar{Z}_R = \frac{\bar{U}_R}{\bar{I}} = \frac{R\bar{I}}{\bar{I}} = R$$

$$\bar{Z}_C = \frac{\bar{U}_C}{\bar{I}} = \frac{\int I_0 \exp(j\omega t)dt}{CI_0 \exp(j\omega t)dt} = \frac{\frac{1}{j\omega} I_0 \exp(j\omega t)}{CI_0 \exp(j\omega t)} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

$$\bar{Z}_L = \frac{\bar{U}_L}{\bar{I}} = L\frac{\frac{d}{dt} I_0 \exp(j\omega t)}{I_0 \exp(j\omega t)} = L\frac{j\omega I_0 \exp(j\omega t)}{I_0 \exp(j\omega t)} = j\omega L$$

ZAPAMIĘTAJ!

$$\boxed{\bar{Z}_R = R}$$

$$\boxed{\bar{Z}_C = -\frac{j}{\omega C}}$$

$$\boxed{\bar{Z}_L = j\omega L}$$

Zadanie 26

Do jakich wartości dąży moduł impedancji kondensatora o pojemności *C* i cewki o indukcyjności *L*, gdy częstość kołowa prądu dąży do zera (prąd stały) i nieskończoności? Jakie płyną stąd wnioski?

Rozwiązanie

Wykorzystując wyniki poprzedniego zadania, obliczmy moduły impedancji dla kondensatora i cewki:

$$\left|\overline{Z}_C\right| = Z_C = \left|-\frac{j}{\omega C}\right| = \frac{1}{\omega C}$$

$$\left|\overline{Z}_L\right| = Z_L = \left|j\omega L\right| = \omega L$$

Możemy teraz obliczyć wartości granic:

$$\lim_{\omega\to 0} Z_C = \lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\omega C} = +\infty$$

$$\lim_{\omega\to +\infty} Z_C = \lim_{\omega\to +\infty}\frac{1}{\omega C} = 0$$

$$\lim_{\omega\to 0} Z_L = \lim_{\omega\to 0}\omega L = 0$$

$$\lim_{\omega\to +\infty} Z_L = \lim_{\omega\to +\infty}\omega L = +\infty$$

Wnioski:

Prąd stały nie płynie przez kondensator, zaś prąd o wysokiej częstotliwości płynie przez niego bez impedancji (oporu).

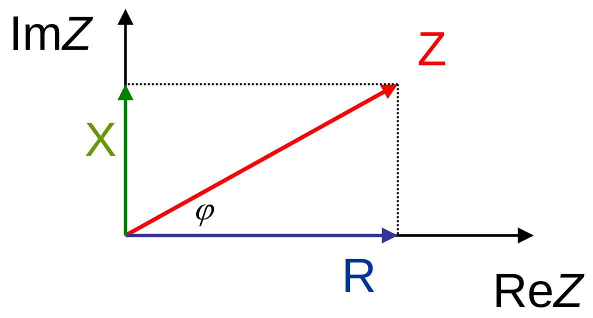
Prąd o wysokiej częstotliwości nie płynie przez cewkę, zaś prąd stały płynie przez nią bez impedancji (oporu).

Zadanie 27

Jakie jest przesunięcie prądu względem napięcia na oporniku R_0, kondensatorze C i cewce L?

Rozwiązanie

Tangens przesunięcia fazowego (różnicy między fazą natężenia prądu a fazą napięcia) φ możemy wyznaczyć następująco:



$$\boxed{tg\,\varphi = \frac{X}{R}}$$

Zatem dla wspomnianych elementów obwodu wyniesie on:

$$tg\,\varphi_R = \frac{0}{R_0} = 0 \Rightarrow \varphi_R = 0$$

$$tg\,\varphi_L = \frac{j\omega L}{0} = +\infty \Rightarrow \varphi_L = +\frac{\pi}{2}$$

$$tg\,\varphi_C = \frac{-j/\omega C}{0} = -\infty \Rightarrow \varphi_C = -\frac{\pi}{2}$$

Zadanie 28

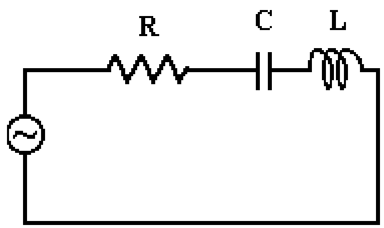
Dany jest szeregowy obwód RLC. Wyznacz:

a) impedancję,

b) zawadę (moduł impedancji),

c) częstotliwość rezonansową,

d) moduł impedancji dla częstotliwości rezonansowej.



Rozwiązanie

Impedancję zastępczą układu złożonego z oporników, kondensatorów i cewek liczymy dla prądu przemiennego analogicznie jak opór zastępczy oporników dla prądu stałego:

$$\boxed{\overline{Z}_{sz} = \sum_i \overline{Z}_i}$$

połączenie szeregowe

$$\boxed{\frac{1}{\overline{Z}_r} = \sum_i \frac{1}{\overline{Z}_i}}$$

połączenie równoległe

a) **Impedancję** szeregowego obwodu RLC policzymy zatem następująco:

$$\overline{Z}(\omega) = \overline{Z}_R + \overline{Z}_L + \overline{Z}_C = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

b) Moduł impedancji (tzw. **zawada**) wynosi wówczas:

$$Z(\omega) = \left|\overline{Z}(\omega)\right| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

WAŻNE!
Impedancja i zawada zależą od częstotliwości (częstości kołowej) płynącego przez obwód prądu.

c) **Częstotliwość rezonansowa**

Częstotliwość rezonansowa to częstotliwość, dla której moduł impedancji obwodu przyjmuje najmniejszą wartość. Moglibyśmy znaleźć minimum wyrażenia na zawadę licząc jej pochodną. Wystarczy jednak zauważyć, że wyrażenie to przyjmuje wartość najmniejszą, gdy reaktancja jest zerowa. Otrzymujemy wówczas:

$$X_0 = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \Rightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Stąd częstotliwość rezonansowa wynosi:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

d) **moduł impedancji dla częstotliwości rezonansowej** wynosi zatem:

$$Z(\omega_0) = \sqrt{R^2 + X^2(\omega_0)} = \sqrt{R^2 + 0} = R$$

Zadanie 30

Dla jakiej częstości kołowej reaktancja układu złożonego z opornika *R* i kondensatora *C* (połączonych równolegle) jest największa (co do wartości bezwzględnej)?

Rozwiązanie

Zacznijmy od wyznaczenia impedancji obwodu:

$$\frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{\overline{Z}_R} + \frac{1}{\overline{Z}_C} = \frac{1}{R} + j\omega C = \frac{1 + j\omega RC}{R}$$

$$\overline{Z} = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{R - j\omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} - j\frac{\omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2}$$

Widzimy, że reaktancja obwodu wynosi:

$$X = -\frac{\omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2}$$

Znajdujemy wartość minimalną poprzez wyznaczenie ekstremum *X*:

$$\frac{dX}{d\omega} = -\frac{R^2 C \cdot \left(1 + (\omega RC)^2\right) - 2\omega (RC)^2 \cdot \omega R^2 C}{\left(1 + (\omega RC)^2\right)^2} = -\frac{R^2 C + \omega^2 R^4 C^3 - 2\omega^2 R^4 C^3}{\left(1 + (\omega RC)^2\right)^2} = -\frac{R^2 C - \omega^2 R^4 C^3}{\left(1 + (\omega RC)^2\right)^2}$$

$$\frac{dX}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow -\frac{R^2 C - \omega^2 R^4 C^3}{\left(1 + (\omega RC)^2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow R^2 C - \omega^2 R^4 C^3 = 0 \Rightarrow R^2 C = \omega^2 R^2 C (RC)^2$$

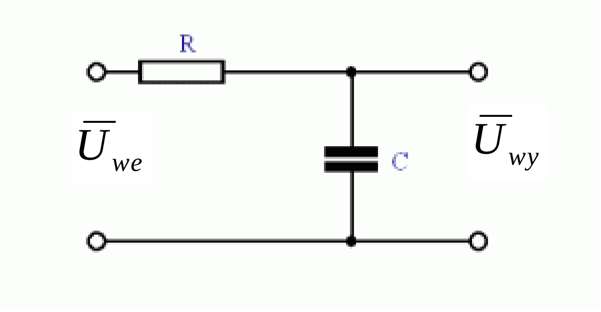
Ostatecznie otrzymujemy wartość częstości kołowej, dla której wartość reaktancji przyjmuje minimum:

$$\boxed{\omega = \frac{1}{RC}}$$

Zadanie 31

Oblicz wzmocnienie filtra dolnoprzepustowego (rys. obok)

w funkcji częstotliwości.



Rozwiązanie

Impedancję wejściową układu stanowi impedancja opornika *R* połączonego szeregowo z kondensatorem *C*:

$$\overline{Z} = \overline{Z}_R + \overline{Z}_C = R - \frac{j}{\omega C}$$

Ponieważ wyjście filtra jest nieobciążone, przez opornik i kondensator płynie prąd o tym samym natężeniu *I*:

$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}_{we}}{\overline{I}} \Rightarrow \overline{I} = \frac{\overline{U}_{we}}{\overline{Z}}$$

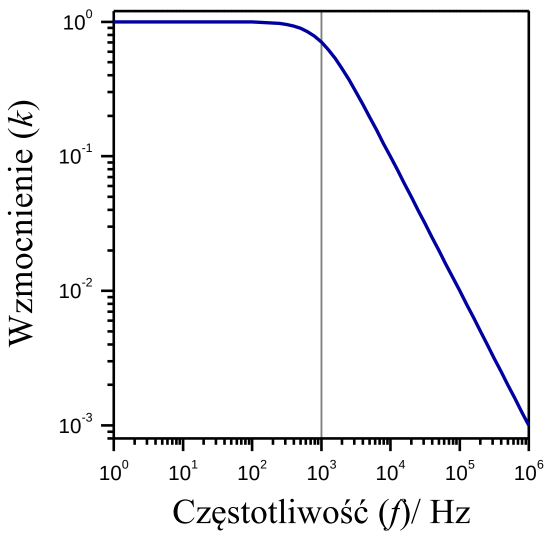
Napięcie wyjściowe jest równe napięciu na kondensatorze *C*:

$$\overline{U}_{wy} = \overline{U}_C = \overline{I}\overline{Z}_C = \overline{U}_{we}\frac{\overline{Z}_C}{\overline{Z}} = \overline{U}_{we} \cdot \frac{-j/\omega C}{R - j/\omega C} = \overline{U}_{we} \cdot \frac{-j}{\omega RC - j}$$

Wzmocnienie układu – definiowane jest stosunek amplitudy

napięcia wyjściowego do wejściowego – wynosi zatem:

$$k(\omega) = \frac{\left|\overline{U}_{wy}\right|}{\left|\overline{U}_{we}\right|} = \left|\frac{-j}{\omega RC - j}\right| = \sqrt{\frac{1}{1 + (\omega RC)^2}} \qquad \boxed{k(f) = \sqrt{\frac{1}{1 + (2\pi f RC)^2}}}$$



Wzmocnienie filtra dla częstotliwości f_0 = 1000 Hz

Niech $f_0 = 1 / (2\pi RC)$. Zauważmy wówczas, że:

$f >> f_0 \Rightarrow k \approx \frac{1}{2\pi RC} << 1$ - tłumienie dla wysokich częstotliwości

$f << f_0 \Rightarrow k \approx 1$ - brak tłumienia dla niskich częstotliwości

Zadanie 232

Oblicz moc traconą na oporniku R podłączonego do źródła prądu przemiennego o amplitudzie napięcia U_0.

Rozwiązanie

Niech napięcie na oporniku dane będzie funkcją $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$.

Wówczas natężenie prądu płynącego przez opornik wynosi $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$, gdzie $I_0 = \frac{U_0}{R}$

Średnią moc wydzielaną na oporniku obliczymy z całki po całym okresie T:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T U(t)I(t)dt = \frac{U_0^2}{RT}\int_0^T \sin^2(\omega t)dt = \frac{U_0^2}{RT}\int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

$$P = \frac{U_0^2}{2RT}\int_0^T 1-\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)dt = \frac{U_0^2}{2RT}\cdot\left[\int_0^T dt - \int_0^T \cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)dt\right] = \frac{U_0^2}{2RT}\cdot\left[T - \frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{T}T\right)\right] = \frac{U_0^2}{2R}$$

$$P = \frac{U_0^2}{2R} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}\cdot\frac{I_0}{\sqrt{2}} = U_{sk}\cdot I_{sk}$$

WSKAZÓWKA

$$\boxed{\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}}$$

Wnioski

Wyznaczyliśmy wyrażenia na **wartości skuteczne** napięcia i natężenia prądu przemiennego.

Wartość skuteczna napięcia (lub natężenia prądu) to wartość odpowiadająca napięciu (lub natężeniu prądu) stałego, który płynąc przez ten sam opornik wydzieli na nim tę samą moc.

Warto wiedzieć…

Wartość napięcia sieci elektrycznej (230 V) to wartość skuteczna napięcia, a nie jego amplituda!

ZAPAMIĘTAJ!

$$U_{sk} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

$$I_{sk} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Zadanie 33

Oblicz moc traconą na oporniku *R* podłączonego do źródła prądu z generatora sygnału prostokątnego. Napięcie maksymalne wynosi U_0, a współczynnik wypełnienia τ (0< τ<1).

Rozwiązanie

Napięcie z generatora sygnału prostokątnego w podstawowym okresie *T* możemy opisać następująco:

$$U(t) = \begin{cases} U_0 & dla\ 0 \le t \le \tau T \\ 0 & dla\ \tau T < t < T \end{cases}$$

Średnią moc obliczymy analogicznie jak w poprzednim zadaniu:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T U(t)I(t)dt = \frac{1}{T}\left[\int_0^{\tau T}\frac{U_0^2}{R}dt + \int_{\tau T}^{T} 0dt\right] = \frac{U_0^2}{RT}\int_0^{\tau T} dt = \frac{U_0^2}{R}\cdot\tau$$

$$P = P_0 \cdot \tau$$

Wniosek

Moc wydzielana na oporniku zasilanym z generatora sygnału prostokątnego jest wprost proporcjonalna do współczynnika wypełnienia sygnału. Sygnał ten nadaje się do regulowania mocy wybranych odbiorników elektrycznych, np. oświetlenia żarowego lub diodowego czy silników małej mocy.

Zadanie 34

Oblicz moc bierną i czynną wydzielaną na solenoidzie o indukcyjności *L* i oporze omowym *R*, zasilaną ze źródła prądu przemiennego o wartości skutecznej napięcia U_{sk} i częstości kołowej ω.

Rozwiązanie

Obliczamy impedancję obwodu i natężenie płynącego przez niego prądu:

$$\overline{Z} = \overline{Z}_R + \overline{Z}_L = R + j\omega L \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$I_{sk} = \frac{U_{sk}}{Z} = \frac{U_{sk}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Moc czynna to moc wydzielana na oporniku omowym:

$$P_c = I_{sk}^2 R = U_{sk}^2 \cdot \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{U_{sk}^2}{Z} \cdot \cos\varphi = U_{sk} I_{sk} \cdot \cos\varphi < U_{sk} I_{sk}$$

Moc bierna to moc gromadzona na skutek występowania reaktancji:

$$P_b = I_{sk}^2 X = U_{sk}^2 \cdot \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{U_{sk}^2}{Z} \cdot \sin\varphi$$

Warto pamiętać…

W odbiornikach prądu zmiennego nie cała moc dostarczona może być użytecznie wykorzystana i wydzielona w postaci mocy czynnej!

$$\boxed{\begin{aligned} P_c &= U_{sk} I_{sk} \cdot \cos\varphi \\ P_b &= U_{sk} I_{sk} \cdot \sin\varphi \end{aligned}}$$

Zadanie 35

Kondensator o pojemności C naładowano do napięcia U_0, a następnie rozładowano przez opornik o oporze R. Wyznacz napięcie na kondensatorze w funkcji czasu $U(t)$ oraz natężenie prądu rozładowania $I(t)$. Jaka stała charakteryzuje ten proces?

Rozwiązanie

Prąd rozładowywania zależny jest od napięcia na oporniku i kondensatorze:

$$U_R = IR \qquad U_C = \frac{q}{C} \qquad U_R = U_C$$

Przepływ prądu powoduje odpływ ładunku z kondensatora:

$$I = -\frac{dq}{dt}$$

Uwzględniając powyższe zależności, korzystając z drugiego prawa Kirchhoffa dochodzimy do jednorodnego równania różniczkowego, które rozwiązujemy metodą rozdzielonych zmiennych:

$$-\frac{dq}{dt}\cdot R = \frac{q}{C} \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\int\frac{dq}{q} = -\int\frac{dt}{RC} \Rightarrow \ln q = -\frac{t}{RC} + \ln q_0 \Rightarrow q(t) = q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = U_0 C \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Stąd łatwo obliczymy napięcie na kondensatorze oraz natężenie prądu rozładowania w funkcji czasu:

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C} = U_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$I(t) = -\frac{d}{dt}U_0 C \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = \frac{U_0 C}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = \frac{U_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

WAŻNE
Proces rozładowywania kondensatora charakteryzuje stała czasowa

$$\tau = RC$$

Zadanie 36

Wyznacz wyrażenie opisujące ładunek zgromadzony na kondensatorze w szeregowym obwodzie *RLC*, jeśli w chwili początkowej na kondensatorze znajdował się ładunek q_0.

Rozwiązanie

Napięcia na poszczególnych elementach obwodu dane są następującymi zależnościami:

$$U_R = RI \qquad U_L = L\frac{dI}{dt} \qquad U_C = \frac{q}{C}$$

Napięcia zsumowane (w sposób zespolony) po całym obwodzie wynoszą 0:

$$U = U_R + U_L + U_C = 0 \Rightarrow RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

PRZYPOMNIENIE

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Pozostaje rozwiązać równanie różniczkowe za pomocą równania charakterystycznego:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$$

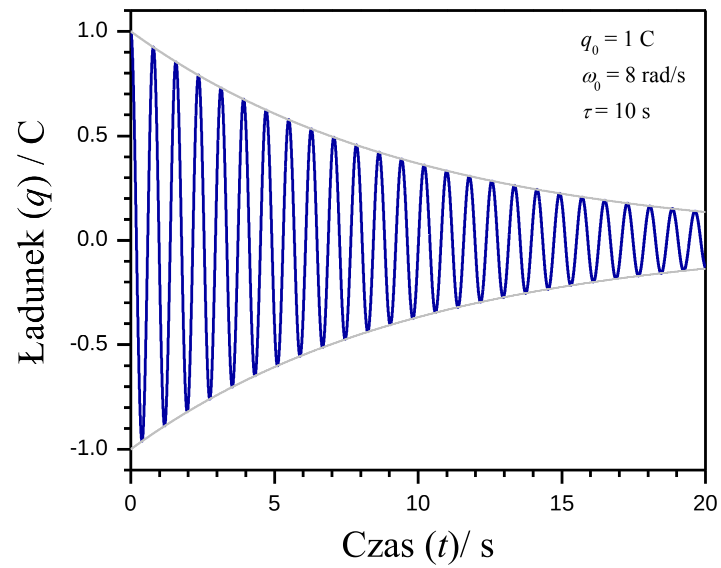
$$\Delta_r = R^2 - 4\frac{L}{C} \Rightarrow r = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

I otrzymujemy:

$$\boxed{q(t) = q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\cos(\omega' t)}$$

gdzie: $\tau = \frac{2L}{R}$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}$$



Zadanie 37

Idealny transformator o n_1 = 2300 zwojach w uzwojeniu pierwotnym i n_2 = 120 zwojach w uzwojeniu wtórnym podłączono do źródła napięcia przemiennego U_1 = 230 V. Oblicz napięcie uzwojenia wtórnego oraz natężenie prądu w obu uzwojeniach, podczas gdy wyjście transformatora jest obciążone oporem R_2 = 12 Ω.

Rozwiązanie

Napięcie na uzwojeniu jest wprost proporcjonalne do liczby zwoi:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow U_2 = U_1 \frac{n_2}{n_1} = 230V \cdot \frac{120}{2300} = 12V$$

Prąd płynący przez uzwojenie wtórne obliczamy z prawa Ohma:

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} \Rightarrow I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{12V}{12\Omega} = 1A$$

W idealnym transformatorze oczekujemy, iż moc dostarczana do uzwojenia pierwotnego i odbierana z uzwojenia wtórnego będą równe, tj:

$$P_1 = P_2 \Leftrightarrow I_1 U_1 = I_2 U_2 \Rightarrow I_1 = I_2 \frac{U_2}{U_1} = 1A \cdot \frac{12V}{230V} \approx 52mA$$

Warto pamiętać…

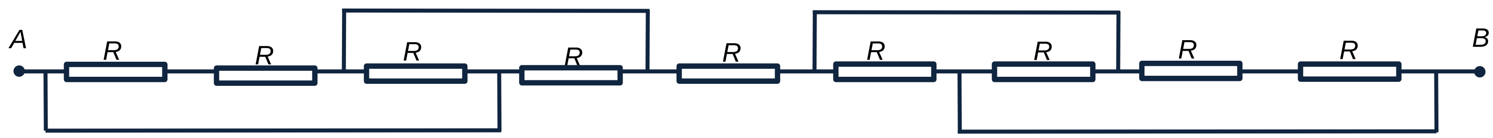
Transformatory obniżające napięcie jednocześnie zwiększają natężenie dostarczanego prądu (i *vice versa*).

W transformatorach rzeczywistych część energii jest tracona w wyniku oporu uzwojeń urządzenia. Pojawia się także problem mocny biernej w wyniku występowania niezerowej reaktancji urządzenia.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1

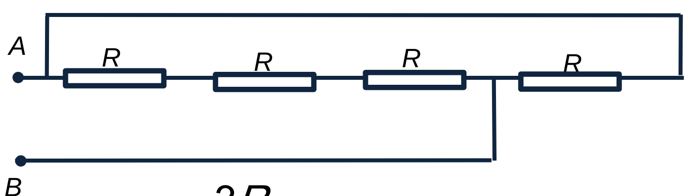
Obliczyć oporność układu dziewięciu jednakowych oporników o oporności R.



Odp. $R_{AB} = \dfrac{9R}{5}$

Zadanie 2

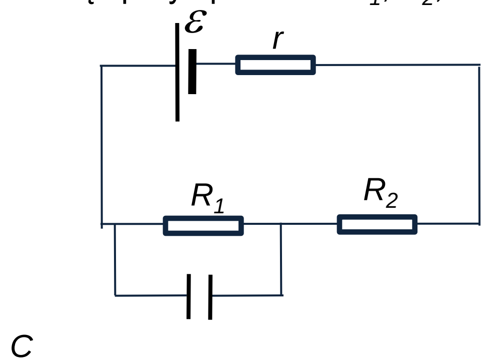
Obliczyć oporność układu czterech jednakowych oporników o oporności R.



Odp. $R_{AB} = \dfrac{3R}{4}$

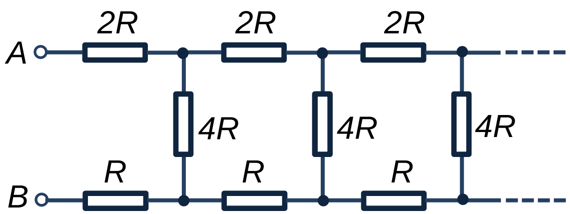
Zadanie 3

Obliczyć energię kondensatora o pojemności C (Rys.). Dane są opory oporników R_1, R_2, siła elektromotoryczna $\mathcal{E}$ *i opór* wewnętrzny ogniwa r.



Odp. $W = \dfrac{1}{2}\mathcal{E}^2 C\left(\dfrac{R_1}{r + R_1 + R_2}\right)^2$

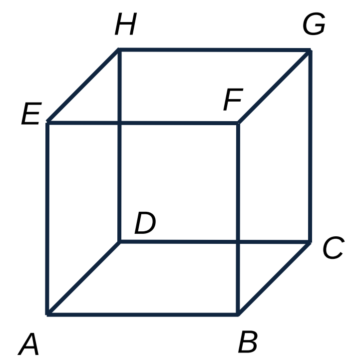
Zadanie 4. Znaleźć całkowity opór nieskończonego układu oporników przedstawionego na rysunku. Napięcie przyłożono do punktów *A* i *B*.



Odp. $R_{AB} = \frac{3}{2}R\left(1+\sqrt{57}\right)$

Zadanie 5. Z drutu zbudowano sześcian. Opór każdej krawędzi sześcianu wynosi *R*. Oblicz opór całkowity sześcianu, jeśli napięcie przyłożono do wierzchołków *AB*

Odp. $R_{AB} = \frac{7}{12}R$



Ilustracja do Zad. 5 i 6

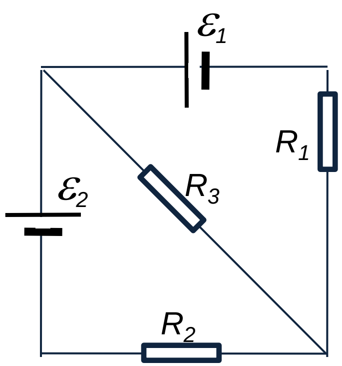
Zadanie 6. Z drutu zbudowano sześcian. Opór każdej krawędzi sześcianu wynosi *R*. Oblicz opór całkowity sześcianu, jeśli napięcie przyłożono do wierzchołków *AG*

Odp. $R_{AB} = \frac{5}{6}R$

Zadanie 7. Bieguny ogniwa o oporze wewnętrznym *r* zwarte są opornikiem *R*. Jaki warunek musi być spełniony, aby po zastąpieniu opornika R innym opornikiem *R'* moc wydzielana w oporniku była taka sama?

Odp. $R' = \frac{r^2}{R}$

Zadanie 8. W obwodzie (rys.) znajdują się dwa ogniwa o siłach elektromotorycznych $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$ oraz trzy oporniki R_1, R_2 i R_3. Obliczyć natężenia prądów płynących przez oporniki.



Odp. $I_1 = \frac{\mathcal{E}_1(R_2+R_3)-\mathcal{E}_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$ $\quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2(R_1+R_3)-\mathcal{E}_1R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$ $\quad I_3 = \frac{\mathcal{E}_1R_2+\mathcal{E}_2R_1}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$

Zadanie 9. Do baterii o oporze wewnętrznym r podłączono 3 jednakowe oporniki R połączone szeregowo. Moc wydzielona w układzie oporników P jest taka sama, jak w układzie tych oporników połączonych równolegle.

a) Obliczyć oporność R

b) Jaką część całkowitej mocy stanowi moc P w obu przypadkach?

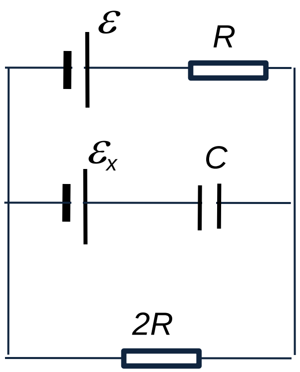
Odp. a) $R = r$ b) połączenie szeregowe $\frac{P}{P_{cał}} = \frac{3}{4}$, połączenie równolegle $\frac{P}{P_{cał}} = \frac{1}{3}$

Zadanie 10. Przy zwarciu zacisków źródła prądu wydziela się moc P. Obliczyć maksymalną moc, jaką można uzyskać z tego źródła na oporniku zewnętrznym.

Odp. $P_{max} = \frac{P}{4}$

Zadanie 11. W obwodzie na rysunku na kondensatorze zebrał się ładunek Q. Obliczyć siłę elektromotoryczną $\mathcal{E}_x$, jeśli dane są pojemność kondensatora C, i siła elektromotoryczna $\mathcal{E}$.

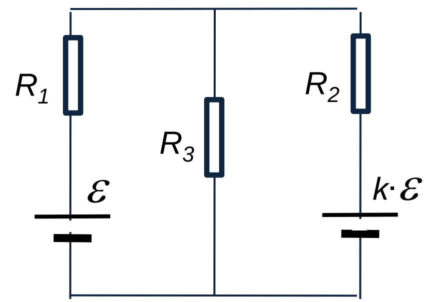
Odp. $\mathcal{E}_x = \frac{3Q + 2\mathcal{E}C}{3C}$



Zadanie 12. Dwie baterie o siłach elektromotorycznych $\mathcal{E}$ i $k{\cdot}\mathcal{E}$ połączono z trzema opornikami R_1, R_2 i R_3 w układ przedstawiony na rysunku. Wyznaczyć stałą k w przypadku, gdy:

a) przez opór R_1, nie płynie prąd?
b) przez opór R_2, nie płynie prąd?

Opory wewnętrzne baterii przyjąć równe zeru.

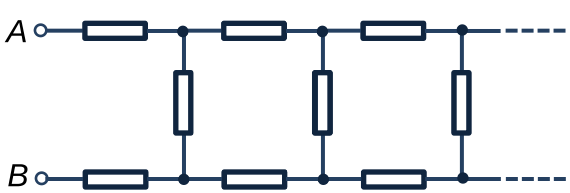


Odp. a) $k = \dfrac{R_2 + R_3}{R_3}$ b) $k = \dfrac{R_3}{R_2 + R_3}$

Zadanie 13. Dwa źródła prądu o o siłach elektromotorycznych $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$ oraz oporach wewnętrznych r_1 i r_2 połączono szeregowo. Jaki opornik R należy dołączyć do baterii, aby napięcie na zaciskach źródła $\mathcal{E}_1$ spadło do zera?

Odp. $R = \dfrac{r_1\mathcal{E}_2 - r_2\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_1}$

Zadanie 14. Znaleźć całkowity opór nieskończonego układu jednakowych oporników o oporze R przedstawionego na rysunku. Napięcie przyłożono do punktów A i B.



Odp. $R_{AB} = R\left(1 + \sqrt{3}\right)$

Zadanie 15. Każdą z dwóch baterii wykonano z k źródeł prądu. W jednej z nich źródła są połączone szeregowo, w drugiej równolegle. Jaki będzie stosunek natężeń prądów płynących przez dołączony do tych baterii opornik R?

Odp. $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r + kR}{kr + R}$

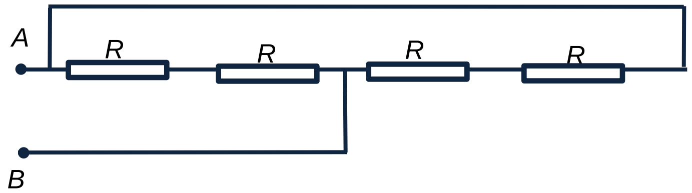
Zadanie 16. Żarówka o oporności R zasilana jest baterią o sile elektromotorycznej ε_1 i oporze wewnętrznym r_1. Czy jest możliwe, aby moc wydzielana w żarówce zmalała, gdy szeregowo włączymy do obwodu jeszcze jedną baterię?

Odp. Tak, jeśli spełniony będzie warunek $\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} < \frac{r_2}{R + r_1}$

Zadanie 17. Po zwarciu zacisków źródła prądu płynie prąd o natężeniu I = 1A. Jaką maksymalną moc można uzyskać z tego źródła na oporniku R = 20Ω?

Odp. $P_{max} = \frac{1}{4} R I^2 = 5\text{W}$

Zadanie 18. Obliczyć oporność układu czterech jednakowych oporników o oporności R.



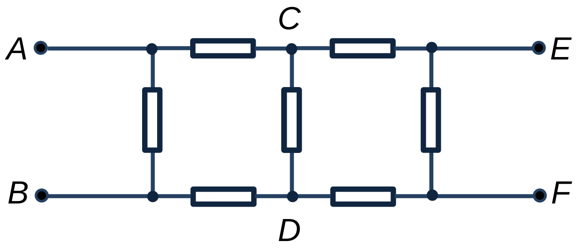
Odp. $R_{AB} = R$

Zadanie 19. Obliczyć oporność układu siedmiu jednakowych oporników o oporności R. Napięcie jest podłączone do punktów A i B.

Odp. $R_{AB} = \frac{11R}{15}$

Zadanie 20. Obliczyć oporność układu siedmiu jednakowych oporników o oporności R. Napięcie jest podłączone do punktów A i C.

Odp. $R_{AC} = \frac{14R}{15}$



Ilustracja do Zad.19 – 24

Zadanie 21. Obliczyć oporność układu siedmiu jednakowych oporników o oporności R. Napięcie jest podłączone do punktów A i D.

Odp. $R_{AD} = \frac{7R}{12}$

Zadanie 22. Obliczyć oporność układu siedmiu jednakowych oporników o oporności R. Napięcie jest podłączone do punktów C i D.

Odp. $R_{CD} = \frac{3R}{5}$

Zadanie 23. Obliczyć oporność układu siedmiu jednakowych oporników o oporności R. Napięcie jest podłączone do punktów A i E.

Odp. $R_{AE} = \frac{4R}{3}$

Zadanie 24. Obliczyć oporność układu siedmiu jednakowych oporników o oporności R. Napięcie jest podłączone do punktów A i F.

Odp. $R_{AF} = \frac{7R}{5}$

Zadanie 25. Do przewodnika aluminiowego o średnicy *d* = 1,38 mm przyłożono napięcie *U* = 21 V. Przez przewodnik płynie prąd o natężeniu *i* = 9 A. Obliczyć natężenie pola elektrycznego w przewodniku.

Koncentracja swobodnych elektronów w aluminium *n* = 3,7·10^{22} m^{-3}, a ich ruchliwość $u = 7 \cdot 10^{-3} \dfrac{m^2}{Vs}$

Odp. $E = 2{,}6 \cdot 10^{-2} \dfrac{V}{m}$

Zadanie 26. W miedzianym przewodniku o objętości *V* = 6 cm^2 podczas przepływu prądu wydzieliła się moc P = 3,6 W. Obliczyć natężenie pola elektrycznego w przewodniku.

Gęstość miedzi ρ = 8960 kg/m^3, a masa atomowa *A* = 63,6

Odp. $E = 0{,}1 \dfrac{V}{m}$

Zadanie 27. Akumulator o sile elektromotorycznej $\mathcal{E}$ = 10 V i oporze wewnętrznym *r* = 2Ω zasila instalację elektryczną zawierającą kilka odbiorników o oporze *R* = 10Ω połączonych równolegle.

a) Ile odbiorników należy włączyć, aby moc użyteczna była maksymalna?

b) Jaka jest sprawność czerpania energii z akumulatora z maksymalną mocą?

Odp. a) 5 b) $\eta = \dfrac{1}{2}$

Zadanie 28

Przewód ma średnicę d=2.4mm i długość L=15m. Opór przewodu wynosi 0.1Ω. Jaka jest oporność właściwa ρ materiału z którego wykonany jest przewód? Jaki prąd I płynie przez przewód kiedy pole E wewnątrz przewodu ma wartość 0.12Vm?

Odp.: $\rho=3.0 \cdot 10^{6}\Omega m$, I=18A

Zadanie 29

Drut żarowy wewnątrz żarówki jest wykonany z wolframu. W temperaturze 20°C prąd płynący przez druta żarowy wynosi I=0.9A. Po pewnym czasie od włączenia żarówka się rozgrzewa i osiąga stałą temperaturę, a wartość prądu spada do 0.2A. Do jakiej temperatury rozgrzała się żarówka jeśli współczynnik temperaturowy oporu wolframu wynosi $\alpha=4.5 \cdot 10^{-3}$ °C^{-1}.

Odp.: T=798°C

Zadanie 30

Znajdź wyrażenia na składową rzeczywistą (rezystancję *R*) i urojoną (reaktancję *X*) impedancji *Y* dla elementu o admitancji Y = *G* + *jB*.

Odp: $$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \qquad X = -\frac{B}{G^2 + B^2}$$

Zadanie 31

Oblicz przesunięcie fazowe prądu dla szeregowego obwodu *RLC* o parametrach *R* = 10 Ω , L = 6 mH , *C* = 3 mF i częstości kołowej ω = 333 rad/s.

Odp: $$tg\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \frac{1}{10} \Rightarrow \varphi \approx 0{,}1 rad$$

Zadanie 32

Kondensator o jakiej pojemności należy włączyć szeregowo do obwodu o indukcyjności L = 100 uH, aby odbierać audycję Programu I Polskiego Radia na fali *f* = 225 kHz?

Odp: $$C = \frac{1}{(2\pi f)^2 L} \approx 5nF$$

Zadanie 33

Ile wynosi wzmocnienie *k* filtra dolnoprzepustowego dla częstotliwości $f = f_0$?

Odp.: $$k = 1/\sqrt{2}$$

Zadanie 34

Jaka jest amplituda napięcia sieciowego (U_{sk} = 230 V)? Oblicz moc i maksymalne natężenie prądu płynącego przez odbiornik o oporze *R* = 4,6 kΩ.

Odp.: U_0 = 325,27 V; *P* = 11,5 W; I_0 = 70,7 mA

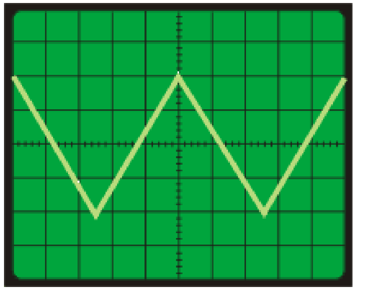
Zadanie 35

Odbiornik o oporze *R* = 10 Ω zasilany jest ze źródła napięcia prostokątnego o napięciu *U*0 = 24 V. Ile wynosi moc odbiornika, maksymalne oraz średnie natężenie prądu płynącego przez niego, jeśli współczynnik wypełnienia τ = 0,25?

Odp: P = 14,4 W; I_0 = 2,4 A; $I_{śr}$ = 0,6 A

Zadanie 36

Ile wynosi wartość skuteczna napięcia o sygnale trójkątnym symetrycznym?



Odp: $U_{sk} = U_0 / \sqrt{3}$

Zadanie 37

Jaka jest moc czynna i bierna wydzielana na odbiorniku o rezystancji *R* = 100 i indukcyjności *L* = 30 mH, zasilanego z sieci 230 V?

Odp: P_c = 524,3 W, P_b = 49,4 W

Zadanie 38

Po jakim czasie napięcie na kondensatorze o pojemności *C* = 100 μF rozładowywanego przez opornik *R* = 50 Ω spadnie dziesięciokrotnie?

Odp.: $t_{1/10} = -RC\ln\frac{1}{10} \approx 11{,}5ms$

Zadanie 39

Znajdź wyrażenie na napięcie kondensatora o pojemności *C* ładowanego ze źródła stałego napięcia U_0 przez opornik *R*.

Odp.: $U_C(t) = U_0\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]$

Zadanie 38

Zaproponuj liczbę uzwojeń transformatora, który będzie obniżał napięcie z U_1 = 230 V na U_2 = 12 V?

Odp: $n_1/n_2 = U_1/U_2$, np. n_1 = 2300, n_2 = 120.

Zadanie 39

Cewka o indukcyjności L = 45 mH posiada reaktancję X_L = 1,3 kΩ. Jaka jest częstotliwość płynącego przez nią prądu? Kondensator o jakiej pojemności posiadać będzie taką samą reaktancję (z dokładnością do znaku) przy tej samej częstotliwości?

Odp: $f = \frac{X_L}{2\pi L} = 4{,}6 kHz$ $\qquad C = \frac{L}{X^2} = 26{,}6 nF$

Zadanie 40

Szeregowy obwód RLC posiada częstotliwość rezonansową f_0 = 6 kHz. Kiedy jest pobudzany napięciem o częstotliwości f_1 = 8 kHz, jego zawada wynosi Z_1 = 1 kΩ, a przesunięcia fazowe 45°. Jaka jest wartość oporności R i indukcyjności L w tym obwodzie?

Odp: $R = \frac{Z_1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 k\Omega$ $\qquad L = \frac{Z_1}{\sqrt{2}\left(\omega_1 - \omega_0^2/\omega_1\right)} = 75 mH$

Zadanie 41

Jaka jest częstotliwość rezonansowa dla równoległego obwodu RLC?

Odp.: $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Zadanie 42

Ile wynosi szerokość połówkowa $\Delta\omega_0$ krzywej rezonansowej dla szeregowego obwodu RLC?

Odp.: $\Delta\omega_0 = \omega_0 R\sqrt{\frac{3C}{L}}$