Zadania z elektromagnetyzmu

Zadania z rozwiązaniami

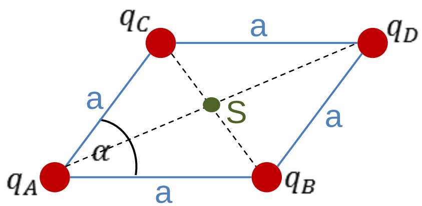
PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1.
W wierzchołkach rombu o boku a i kącie ostrym $\alpha = 60°$ umieszczono cztery ładunki elektryczne $q_A = 2C$, $q_B = -1C$, $q_C = -3C$, $q_D = -2C$. Obliczyć potencjał i natężenie pola elektrostatycznego w punkcie S, w którym przecinają się przekątne rombu.



Rozwiązanie:
Potencjały pól wytworzonych przez pojedyncze ładunki punktowe w S wynoszą odpowiednio:

$$V_A = k\frac{q_A}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = k\frac{2\sqrt{3}\,q_A}{3a}$$

$$V_B = k\frac{q_B}{\frac{1}{2}a} = k\frac{2\,q_B}{a}$$

$$V_C = k\frac{q_C}{\frac{1}{2}a} = k\frac{2\,q_C}{a}$$

$$V_D = k\frac{q_D}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = k\frac{2\sqrt{3}\,q_D}{3a}$$

Gdzie $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$
Wypadkowy potencjał w punkcie S:

$$V = V_A + V_B + V_C + V_D$$

Stąd:

$$V = \frac{k}{a}\left(\frac{2\sqrt{3}\,q_A}{3} + 2q_B + \frac{2\sqrt{3}\,q_D}{3} + 2q_C\right)$$

Podstawiając wartości ładunków otrzymujemy:

$$V = \frac{k}{3a}\left(4\sqrt{3} - 6 - 4\sqrt{3} - 18\right) = \frac{-8}{a}\,k$$

Aby znaleźć wypadkowe natężenie w punkcie S musimy najpierw obliczyc wartości natężeń od poszczególnych ładunków punktowych.

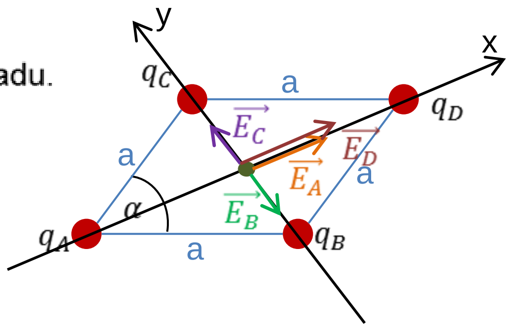
$$E_A = k\,\frac{q_A}{\left(a\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 4k\frac{q_A}{3\mathrm{a}^2} = \mathrm{k}\,\frac{8}{3\mathrm{a}^2}$$

$$E_B = k\,\frac{|q_B|}{\left(\frac{1}{2}a\right)^2} = 4k\frac{1}{\mathrm{a}^2}$$

$$E_C = k\,\frac{|q_C|}{\left(\frac{1}{2}a\right)^2} = 4k\frac{3}{\mathrm{a}^2}$$

$$E_D = k\,\frac{|q_D|}{\left(a\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 4k\frac{4}{3\mathrm{a}^2} = \mathrm{k}\,\frac{16}{3\mathrm{a}^2}$$

Wprowadzamy układ współrzędnych tak, aby przekątne rombu leżały na osiach układu.



Zapisujemy wektory natężeń w tym układzie:

$$\overrightarrow{E_A} = \left[\frac{8k}{3a^2};\ 0\right]$$

$$\overrightarrow{E_B} = \left[0; -\frac{4k}{a^2}\right]$$

$$\overrightarrow{E_C} = \left[0; \frac{12k}{a^2}\right]$$

$$\overrightarrow{E_D} = \left[\frac{16k}{3a^2};\ 0\right]$$

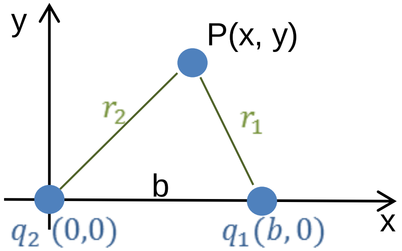
Dodając wektory do siebie otrzymujemy wypadkowe natężenie pola w punkcie S.

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_A} + \overrightarrow{E_B} + \overrightarrow{E_C} + \overrightarrow{E_D}$$

$$\vec{E} = \left[\frac{8k}{a^2}; \frac{8k}{a^2}\right]$$

Zadanie 2.
Dwa różnoimienne ładunki punktowe q_1 i $q_2 = -2q_1$ znajdują się w odległości b od siebie. Wyprowadzić równanie linii zerowego potencjału.

Rozwiązanie:
Wprowadźmy kartezjański układ współrzędnych umieszczając ładunek q_2 w początku tego układu, a ładunek q_1 na osi x.



Potencjał pola elektrostatycznego w dowolnym punkcie $P(x, y)$ jest sumą potencjałów pól wytworzonych przez ładunki q_1 i q_2.

$$V(x,y) = V_{1(r_1)} + V_{2(r_2)} = k\frac{q_1}{r_1} + k\frac{q_2}{r_2}$$

gdzie $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$$r_2 = \sqrt{x^2+y^2} \text{ i } r_1 = \sqrt{(b-x)^2+y^2}$$

Stąd

$$V(x,y) = k\left(\frac{q_1}{\sqrt{(b-x)^2+y^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Wstawiając $q_2 = -2q_1$ otrzymujemy

$$V(x,y) = kq_1\left(\frac{1}{\sqrt{(b-x)^2+y^2}} - \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Ponieważ chcemy wypowadzić równanie linii zerowego potencjału, więc

$$V(x,y) = 0$$

czyli

$$\frac{1}{\sqrt{(b-x)^2+y^2}} - \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$
$$\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{(b-x)^2+y^2}$$

Podnosząc do kwadratu otrzymujemy:

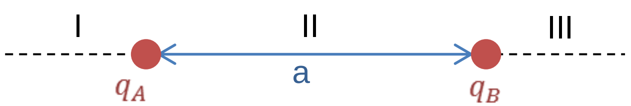
$$x^2+y^2 = 4(b-x)^2+4y^2$$
$$0 = 3x^2+3y^2+4b^2-8bx$$
$$0 = y^2+x^2+\frac{4}{3}b^2-\frac{8}{3}bx$$
$$y^2+\left(x-\frac{4}{3}b\right)^2 = \frac{4}{9}b^2$$

Otrzymaliśmy równanie okręgu o środku w punkcie $\left(\frac{4}{3}b;0\right)$ i promieniu $R=\frac{2}{3}b$

Zadanie 3.

Ładunki punktowe $q_A=-2C$ i $q_B=5C$ znajdują się w odległości a od siebie. Znaleźć punkty na prostej łączącej te ładunki, w których potencjał pola jest równy zeru.

<u>Rozwiązanie:</u>



Wyprowadzając oznaczenia: r_A - odległość od q_A, r_B - odległość od q_B

Możemy zapisać wypadkowy potencjał jako sumę dwóch potencjałów pól wytworzonych przez poszczególne ładunki:

$$V = V_A+V_B = k\frac{q_A}{r_A}+k\frac{q_B}{r_B}$$

Gdzie $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

Podstawiając dane:

$$V = -k\frac{2}{r_A}+k\frac{5}{r_B}$$

I przyrównując do zera otrzymujemy: $2r_B = 5r_A$ (*)
Mamy więc dwa takie punkty dla których powyższa zależność jest prawdziwa.

I. Na lewo od q_A w obszarze I:
Oznaczając przez x odległość od q_A.

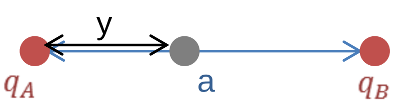
Mamy:

$$2(x + a) = 5x$$

Stąd:

$$x = \frac{2}{3}a$$

II. W obszarze II pomiędzy ładunkami:
Oznaczając przez y odległość od q_A.



Czyli:

$$r_A = y$$
$$r_B = a - y$$

Stąd:

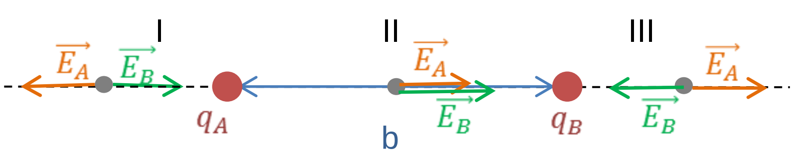
$$2(a - y) = 5y$$

Ostatecznie:

$$y = \frac{2}{7}a$$

Zadanie 4.
Ładunki punktowe $q_A = 3C$ i $q_B = -4C$ znajdują się w odległości b od siebie. Znaleźć punkty na prostej łączącej te ładunki, w których natężenie jest równe zeru.

<u>Rozwiązanie:</u>
Wypadkowe natężenie pola elektrostatycznego jest sumą wektorową natężeń pól wytworzonych przez pojedyncze ładunki.



Z rysunku widzimy, że wypadkowe natężenie nie będzie równe zeru w obszarze II pomiędzy ładunkami, ponieważ oba wektory składowe mają ten sam zwrot.

Dla obszaru I mamy:

$$E_A = k\frac{|q_A|}{z^2}$$

$$E_B = k\frac{|q_B|}{(z+b)^2}$$

Gdzie z – odległość punktu w którym natężenie wypadkowe jest zero.

$$E_A = E_B$$

$$k\frac{|q_A|}{z^2} = k\frac{|q_B|}{(z+b)^2}$$

Podstawiając wartości ładunków otrzymujemy:

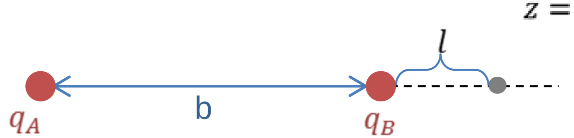
$$\frac{3}{z^2} = \frac{4}{(z+b)^2}$$

$$3(z+b)^2 = 4z^2$$

$$\sqrt{3}(z+b) = 2z$$

$$z = \frac{\sqrt{3}\,b}{2-\sqrt{3}}$$

Dla obszaru III:



Postępując analogicznie jak poprzednio

$$E_A = k\frac{|q_A|}{(b+l)^2}$$

$$E_B = k\frac{|q_B|}{l^2}$$

Przyrównując i wstawiając wartości ładunków mamy:

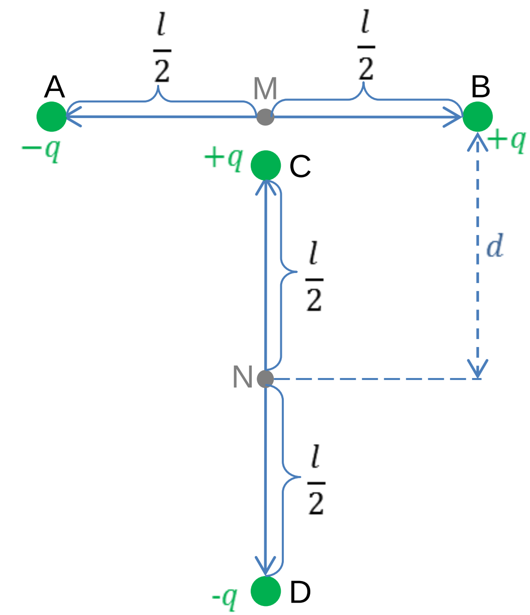
$$4(b+l)^2 = 3l^2$$

$$l = \frac{\sqrt{3}-2}{2}$$

Otrzymana wielkość jest ujemna, co świadczy o tym, że w obszarze III nie ma takiego punktu, w którym natężenie jest równe zeru.

Zadanie 5.

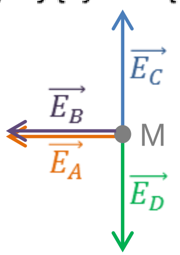
Dwa jednakowe dipole, których ładunki $+q$ i $-q$ znajdują się w odległości l od siebie leżą w jednej płaszczyźnie w ten sposób, że oś jednego jest jednocześnie linią zerowego potencjału drugiego. Odległość między środkami dipoli d.
Znaleźć natężenie pola elektrostatycznego w środkach tych dipoli.



Rozwiązanie:

1) Weźmy pod uwagę punkt M.

Z zasady superpozycji wynika, że natężenie pola elektrostatycznego będzie wektorową sumą natężeń pól pochodzących od ładunków punktowych znajdujących się w punktach A, B, C i D.



$\overrightarrow{E_A}$, $\overrightarrow{E_B}$, $\overrightarrow{E_C}$, $\overrightarrow{E_D}$ natężenia pól ładunków A, B, C i D

$$E_A = E_B = k\frac{q}{\left(\frac{1}{2}l\right)^2} = \frac{4kq}{l^2}$$

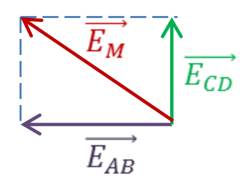
$$E_C = k\frac{q}{\left(d-\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$E_D = k\frac{q}{\left(d+\frac{l}{2}\right)^2}$$

Gdzie $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

Dodając wektory $\overrightarrow{E_A}$ i $\overrightarrow{E_B}$ oraz $\overrightarrow{E_C}$ i $\overrightarrow{E_D}$ otrzymujemy:

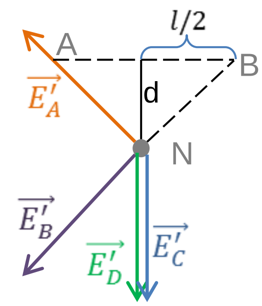
$$E_{AB} = E_A + E_B$$
$$E_{CD} = E_C - E_D$$



Stąd natężenie w punkcie M wynosi:

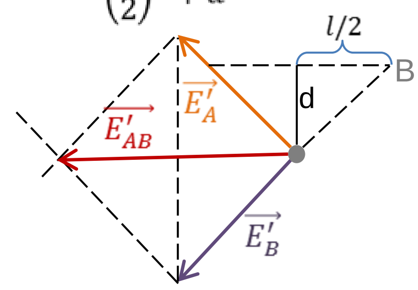
$$E_M = \sqrt{E_{AB}^2 + E_{CD}^2} = \sqrt{(E_A + E_B)^2 + (E_C - E_D)^2} = \sqrt{\left(\frac{8kq}{l^2}\right)^2 + \left(\frac{kq}{\left(d-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{kq}{\left(d+\frac{l}{2}\right)^2}\right)^2}$$

2) Podobnie dla punktu N



$$E'_C = E'_D = k\frac{q}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{4kq}{l^2}$$

$$E'_A = E'_B = k\frac{q}{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + d^2}$$



Dodając wektory $\overrightarrow{E'_A}$ i $\overrightarrow{E'_B}$ otrzymujemy wektor $\overrightarrow{E_{AB}}$

Z trójkątów podobnych: $\frac{E'_{AB}}{E'_A} = l/\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + d^2}$

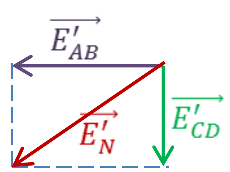
Stąd:

$$E'_{AB} = \frac{l\,E'_A}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + d^2}}$$

Dodając E'_C i E'_D otrzymujemy E'_{CD}:

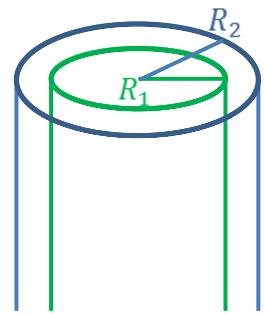
$$E'_{CD} = \frac{8kq}{l^2}$$

Suma wektorów $\overrightarrow{E'_{CD}}$ i $\overrightarrow{E'_{AB}}$ jest poszukiwanym wektorem $\overrightarrow{E'_N}$



$$E_N = \sqrt{E'^2_{AB} + E'^2_{CD}} = kq\sqrt{\frac{l^2}{\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + d^2\right]^3} + \left(\frac{8}{l^2}\right)^2}$$

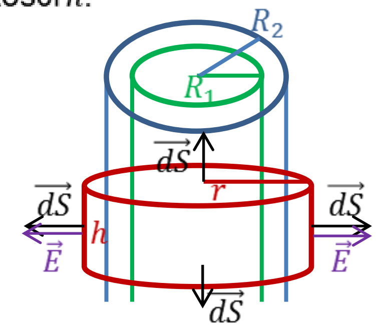
Zadanie 6.
Przestrzeń między dwiema nieskończonymi współosiowymi powierzchniami walcowymi o promieniach R_1 i R_2 wypełniono ładunkiem o stałej gęstości objętościowej $\rho > 0$. Znaleźć natężenie pola elektrostatycznego w funkcji odległości od wspólnej osi obu walców.



<u>Rozwiązanie:</u>
Korzystamy z prawa Gaussa:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

S – powierzchnia Gaussa
Rozpatrzymy trzy obszary.
1) $r \geq R_2$
Gdzie r – odległość od osi.
Powierzchnią Gaussa (wybraną przez nas) będzie walec o promieniu $r \geq R_2$ i wysokości h.



Strumień pola elektrostatycznego przechodzący przez powierzchnię Gaussa:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_b} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_p} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Gdzie S_b - powierzchnia boczna
S_p - powierzchnia podstaw

$$\Phi_E = \int_{S_b} E \cdot dS \cdot cos0° + \int_{S_p} E \cdot dS \cdot cos90° = \int_{S_b} E \cdot dS$$

Ponieważ wartość natężenia pola na powierzchni bocznej naszego walca jest stała, więc

$$\Phi_E = E \int_{S_b} dS = E \cdot 2\pi r h$$

Ładunek zawarty wewnątrz powierzchni Gaussa:

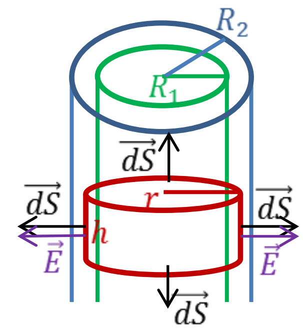
$$Q = \rho \pi h (R_2^2 - R_1^2)$$

Korzystając z prawa Gaussa mamy:

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{\rho \pi h (R_2^2 - R_1^2)}{\varepsilon_0}$$

Stąd:

$$E = \frac{\rho (R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r}$$



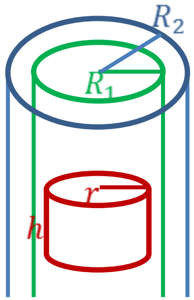
2) $R_1 \leq r < R_2$
Podobnie postępujemy w obszarze pomiędzy walcami.

$$\Phi_E = E \cdot 2\pi r h$$
$$Q = \rho \pi h (r^2 - R_1^2)$$

Stąd:

$$E = \frac{\rho (r^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r}$$

3) $r < R_1$



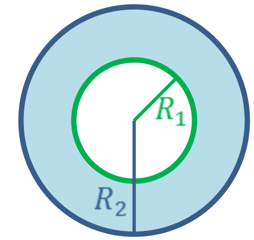
$$\Phi_E = E \cdot 2\pi r h$$
$$Q = 0$$

Stąd:

$$E = 0$$

Zadanie 7.
Przestrzeń między dwiema współśrodkowymi powierzchniami kulistymi o promieniach R_1 i R_2 wypełniono ładunkiem elektrycznym o stałej gęstości objętościowej $\rho = const < 0$. Wyznaczyć natężenie pola elektrostatycznego w funkcji odległości od środka obu sfer.

Rozwiązanie:
Korzystamy z prawa Gaussa:

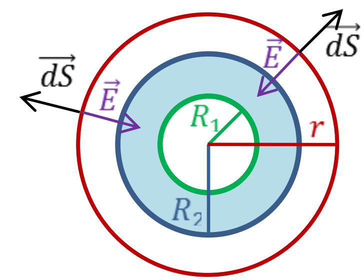


$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Musimy przeanalizować 3 obszary:

1) $r \geq R_2$

Powierzchnią Gaussa(wybraną przez nas) jest sfera o promieniu r.



Z prawa Gaussa mamy:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E\, dS\, cos180° = -\oint_S E\, dS$$

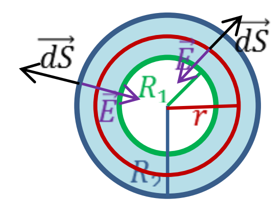
Wartość natężenia jest stała na całej sferze S.

$$\Phi_E = -\oint_S E\, dS = -E \cdot 4\pi r^2$$

Ładunek zawarty wewnątrz sfery o promieniu r:

$$Q = \frac{4}{3}\pi\rho(R_2^3 - R_1^3)$$

Korzystając z prawa Gaussa otrzymujemy:



$$-E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho(R_2^3 - R_1^3)}{\varepsilon_0}$$

Stąd:

$$E = -\frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Zauważmy, że $E > 0$ ponieważ $\rho < 0$

2) $R_1 \leq r < R_2$

Analogicznie postępujemy w obszarze między sferami R_1 i R_2.

$$\Phi_E = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2$$

$$Q = \rho\frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)$$

Z tw. Gaussa mamy:

$$E = -\frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{2\varepsilon_0 r^2}$$

3) $r < R_1$

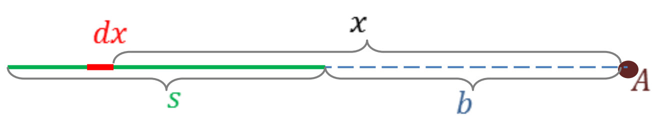
$Q = 0$

Stąd: $\Phi_E = 0$

Czyli: $E = 0$

Zadanie 8.

Odcinek o długości s został równomiernie naładowany ładunkiem o stałej gęstości liniowej $\lambda = const > 0$. Znaleźć potencjał pola elektrostatycznego w punkcie A leżącym na przedłużeniu odcinka w odległości b od jego prawego końca.



<u>Rozwiązanie:</u>

Dzielimy odcinek s na nieskończoną ilośc małych fragmentów o długości dx każdy.
Element dx odcinka znajduje się w odległości x od punktu A.
Zatem potencjał pola elektrostatycznego wytworzonego przez ten mały fragment wynosi:

$$dV = k\frac{dq}{x}$$

Gdzie $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

Ponieważ

$$dq = \lambda\, dx$$

Stąd:

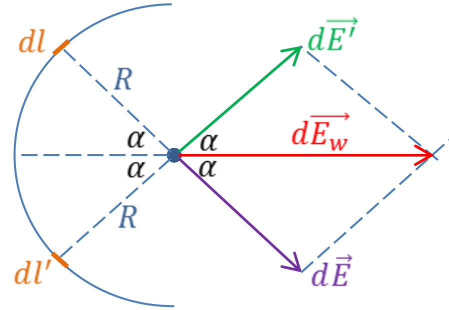
$$dV = k\frac{\lambda dx}{x}$$

Dla całego odcinka:

$$V = \int_b^{s+b} k\,\lambda\frac{dx}{x} = k\lambda\int_b^{s+b}\frac{dx}{x} = [k\lambda\ln|x|]_b^{s+b} = k\lambda\ln\left(\frac{s+b}{b}\right)$$

Zadanie 9.
Nieprzewodzący cienki pręt został zgięty tworząc półokrąg o promieniu R. Pręt ten został naładowany ładunkiem o stałej gęstości liniowej $\lambda = const > 0$. Znaleźć natężenie pola elektrostatycznego w środku pierścienia.

<u>Rozwiązanie:</u>
Podzielmy pręt na małe fragmenty o długości dl każdy.
Weźmy pod uwagę dwa elementy pręta dl i dl' położone symetrycznie względem osi symetrii pręta.



$$dl = dl'$$

Natężenie pola elektrostatycznego od obu tych fragmentów w punkcie 0 wynoszą odpowiednio $d\vec{E}$ i $d\vec{E}'$.

$$dE = dE' = k\frac{dq}{R^2}$$

Gdzie $k = 1/4\pi\varepsilon_0$
Ponieważ

$$dq = dq' = \lambda \cdot dl$$

Mamy:

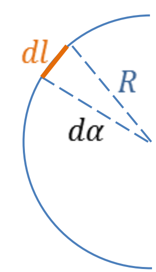
$$dE = dE' = k\frac{\lambda dl}{R^2}$$

Wypadkowe natężenie $d\overrightarrow{E_w}$ możemy znaleźć zauważając, że $d\overrightarrow{E_w}$ jest przekątną rombu o kącie 2α.

$$\frac{\frac{1}{2}dE_w}{dE} = cos\alpha$$

$$dE_w = 2dE\ cos\alpha$$

$$dE_w = 2cos\alpha\, k\frac{\lambda dl}{R^2}$$



Korzystając ze związku między długością łuku a kątem środkowym

$$dl = Rd\alpha$$

Otrzymujemy

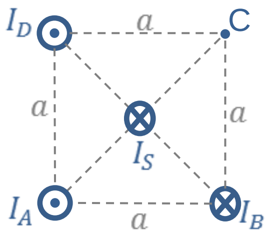
$$dE_w = 2k\ cos\alpha\frac{\lambda R\ d\alpha}{R^2} = \frac{2k\lambda\ cos\alpha\ d\alpha}{R}$$

Całkowite natężenie od wszystkich elementów znajdujemy całkując powyższe wyrażenie:

$$E_w = \int_0^{\pi/2} \frac{2k\lambda\, cos\alpha}{R}\, d\alpha = \frac{2k\lambda}{R}\int_0^{\pi/2} cos\alpha\, d\alpha = \left[\frac{2k\lambda}{R}\, sin\alpha\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2k\lambda}{R}$$

Kierunek i zwrot natężenia $\overrightarrow{E_w}$ jest taki sam jak wektora $d\overrightarrow{E_w}$.

Zadanie 10.
Cztery cienkie nieskończone prostoliniowe przewodniki przebijają poziomą powierzchnię jak na rysunku tworząc trójkąt równoramienny prostokątny. Wiedząc, że indukcja pola magnetycznego od prostoliniowego nieskończonego przewodnika wyraża się wzorem $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ znaleźć indukcję pola magnetycznego w punkcie C.

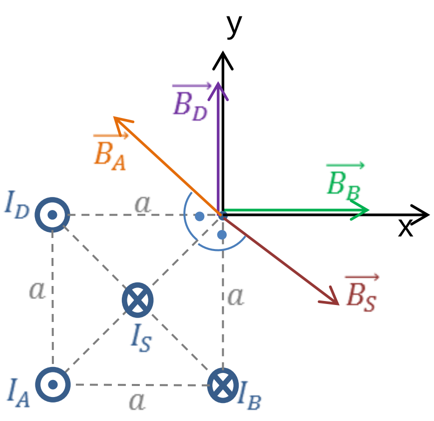


Rozwiązanie:
Możemy znaleźć indukcję pól magnetycznych pochodzących od poszczególnych przewodników.

$$B_A = \frac{\mu_0 I_A}{2\pi a\sqrt{2}} \qquad B_B = \frac{\mu_0 I_B}{2\pi a}$$

$$B_D = \frac{\mu_0 I_D}{2\pi a} \qquad B_S = \frac{\mu_0 I_S}{2\pi\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\mu_0 I_S}{\pi a\sqrt{2}}$$

Wprowadzamy układ współrzędnych:



Zapisujemy wektory indukcji magnetycznej w tym układzie.

$$\overrightarrow{B_A} = [-B_A \cos 45°;\ B_A \sin 45°] = \left[-B_A \frac{\sqrt{2}}{2}; B_A \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

.

$$\overrightarrow{B_S} = [B_S \cos 45°; -B_S \sin 45°] = \left[B_S \frac{\sqrt{2}}{2}; -B_S \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

.

$$\overrightarrow{B_B} = [B_B;\ 0]$$

.

$$\overrightarrow{B_D} = [0;\ B_D]$$

Korzystając z zasady superpozycji możemy znaleźć wypadkową indukcję pola magnetycznego.

.

$$\vec{B} = \overrightarrow{B_A} + \overrightarrow{B_S} + \overrightarrow{B_B} + \overrightarrow{B_D}$$

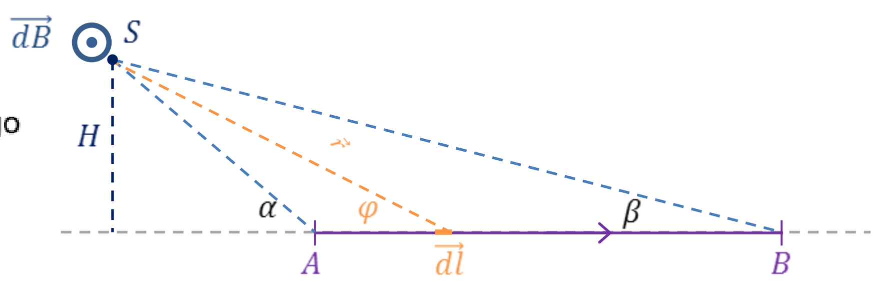
$$\vec{B} = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} B_A + \frac{\sqrt{2}}{2} B_S + B_B; \frac{\sqrt{2}}{2} B_A - \frac{\sqrt{2}}{2} B_S + B_D\right]$$

Ostatecznie:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi a}\left[-\frac{I_A}{2} + I_S + I_B; \frac{1}{2} I_A - I_S + I_D\right]$$

Zadanie 11.

W prostoliniowym przewodniku AB płynie prąd o natężeniu I. Znaleźć indukcję pola magnetycznego w punkcie S. Punkt S widać z lewego końca A przewodnika pod kątem α, a z prawego pod kątem β. Odległość punktu S od prostej, na której leży przewodnik wynosi H.



Rozwiązanie:
Jeśli weźmiemy element przewodnika dl, to oznaczając kąt,
pod jakim widać punkt S z tego elementu przez φ możemy napisać:

$$\frac{H}{r} = sin\varphi \qquad \text{gdzie } r \text{ – odległość elementu } dl \text{ do punktu S}$$

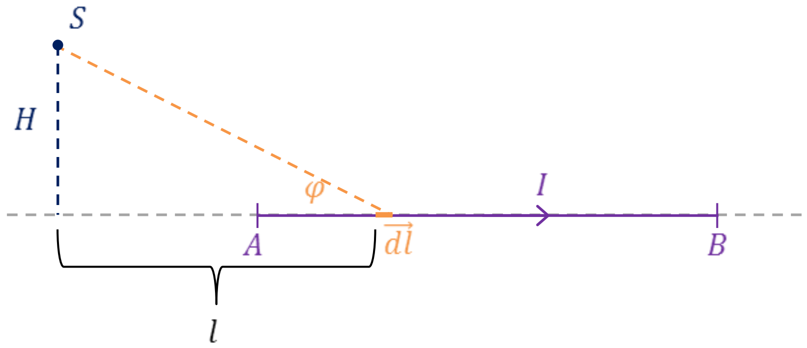
Czyli:

$$r = \frac{H}{sin\varphi}$$

Z prawa Biota-Savarta indukcja pola magnetycznego w punkcie S od elementu dl wynosi:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\left|\vec{dl} \times \vec{r}\right|}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot r\, sin(180^0 - \varphi)}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\, sin\varphi = \frac{\mu_0 I\, dl}{4\pi H^2}\, sin^3\varphi$$

Aby znaleźć wypadkową indukcję od całego przewodnika musimy uzależnić dl od kąta φ.



Ponieważ zgodnie z oznaczeniami na rysunku:

$$\frac{H}{l} = tg\varphi$$

$$l = \frac{H}{tg\varphi}$$

Stąd:

$$\frac{dl}{d\varphi} = -\frac{H}{sin^2\varphi}$$

$$dl = -\frac{H}{sin^2\varphi} d\varphi$$

Podstawiając do wzoru na dB otrzymujemy:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi H^2}\, sin^3\varphi \cdot \left(-\frac{H}{sin^2\varphi} d\varphi\right) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi H}\, sin\varphi\, d\varphi$$

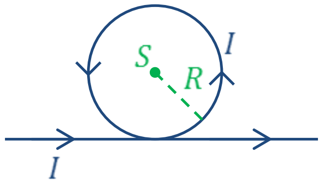
Ostatecznie wartość indukcji pola magnetycznego w punkcie S jest równa:

$$B = -\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\mu_0 I}{4\pi H} sin\varphi \, d\varphi = +\frac{\mu_0 I}{4\pi H} cos\varphi \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi H}(cos\beta - cos\alpha)$$

Wektor indukcji jest prostopadły do płaszczyzny rysunku i skierowany do nas.

Zadanie 12.

Znaleźć wartość indukcji magnetycznej w punkcie S, jeśli przez nieskończony przewodnik płynie prąd o natężeniu I a promień pętli to R.

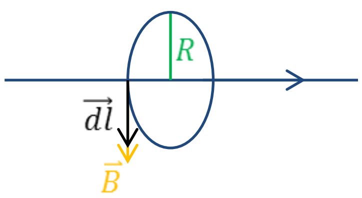


Rozwiązanie:

Zgodnie z zasadą superpozyzycji indukcja pola magnetycznego w punkcie S będzie sumą wektorową pól pochodzących od prostej i od okręgu.

Aby znaleźć indukcję od prostoliniowego przewodnika korzystamy z prawa Ampera:

$$\oint_L \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0 I$$



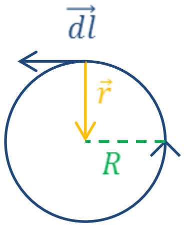
Otaczając przewodnik okręgiem o promieniu R leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do przewodnika mamy:

$$\oint_L \vec{B}\,\vec{dl} = \oint_L B\, dl\, cos0° = \int_L B\, dl = B \cdot L = B \cdot 2\pi R = \mu_0 I$$

Stąd:

$$B_{prosta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Szukając indukcji pola magnetycznego dla okręgu korzystamy z prawa Biota-Savarta. Dla elementu dl:



$$|\vec{dB}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{|\vec{dl} \times \vec{r}|}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot r\, sin90°}{r^3} = \frac{\mu_0 I\, dl}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I\, dl}{4\pi R^2}$$

Dla całego okręgu:

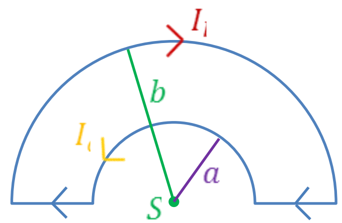
$$B_{okrąg} = \int_L \frac{\mu_0 I\,dl}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Ponieważ dla prostej i okręgu wektory indukcji magnetycznej mają ten sam kierunek i zwrot więc wartość wypadkowej indukcji będzie ich sumą:

$$B = B_{prosta} + B_{okrąg} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\cdot(1+\pi)$$

Zadanie 13.

W płaszczyźnie rysunku leży fragment większego obwodu składający się dwóch półokręgów o promieniach a i b. Znaleźć natężenie pola magnetycznego w punkcie S, jeśli płyną w nich prądy odpowiednio I_a i I_b.



Rozwiązanie:

Korzystamy z zasady superpozycji i prawa Biota-Savarta:

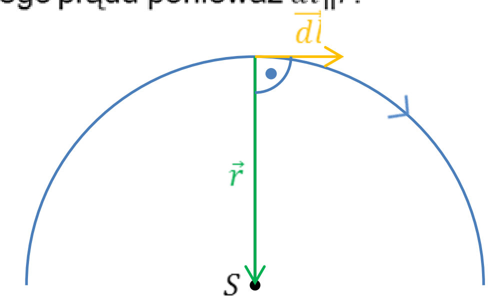
$$\overrightarrow{dH} = \frac{I}{4\pi}\cdot\frac{\overrightarrow{dl}\times\vec{r}}{r^3}$$

Prostoliniowe odcinki nie wytwarzają pola magnetycznego w kierunku przepływającego prądu ponieważ $\overrightarrow{dl}\parallel\vec{r}$.

Dla półokręgu mamy:

$$dH = \frac{I}{4\pi}\cdot\frac{dl\cdot r\,\sin 90^\circ}{r^3}$$

$$dH = \frac{I\,dl}{4\pi r^2}$$

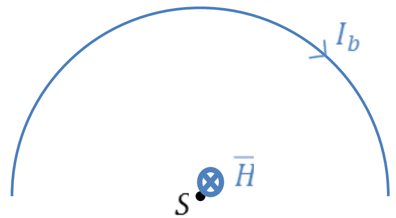


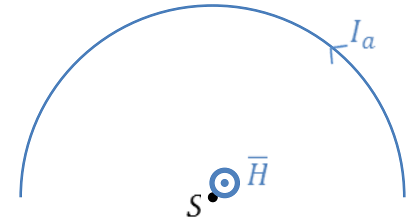
Dla okręgu o promieniu b mamy:

$$H_b = \frac{I_b}{4\pi b^2}\int_0^{\pi b} dl = \frac{I_b}{4b}$$

Dla półokręgu o promieniu a analogicznie:

$$H_a = \frac{I_a}{4a}$$





Natężenie pola magnetycznego w punkcie S wynosi:

$$H = |H_b - H_a| = \left|\frac{I_b}{4b} - \frac{I_a}{4a}\right|$$

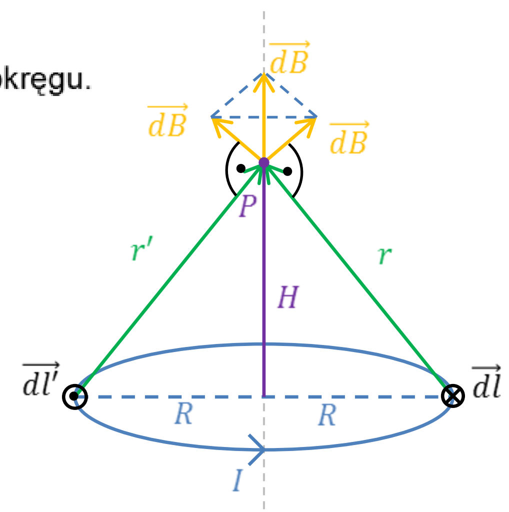
Zadanie 14.

W przewodniku, który ma kształt okręgu o promieniu R płynie prąd o natężeniu I. Wyznaczyć wartość indukcji pola magnetycznego oraz określić jej kierunek i zwrot w punkcie P leżącym na prostej przechodzącej przez środek okręgu i prostopadłej do płaszczyzny wyznaczonej przez okrąg i w odległości H od tej płaszczyzny.

Rozwiązanie:

Weźmy pod uwagę dwa elementy okręgu leżące symetrycznie względem środka okręgu.

Korzystamy z prawa Biota-Savarta:



$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\overrightarrow{dl} \times \vec{r}}{r^3}$$

Dla elementu z prawej strony otrzymujemy:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot r\, sin90°}{r^3} = \frac{\mu_0 I\, dl}{4\pi r^2}$$

Podobnie dla elementu z lewej strony:

$$dB' = \frac{\mu_0 I\, dl'}{4\pi r'^2}$$

Ponieważ $dl = dl'$ i $r = r'$, więc $dB = dB'$

Wektor $\overrightarrow{dB_W}$ ma kierunek prostej, zwrot do góry.

Pisząc odpowiednie proporcje dla trójkątów podobnych mamy:

$$\frac{\frac{1}{2}dB_W}{dB} = \frac{R}{r}$$

$$dB_W = 2dB\frac{R}{r}$$

Podstawiając wzór na dB otrzymujemy:

$$dB_W = 2\frac{\mu_0 I\,dl}{4\pi r^2}\cdot\frac{R}{r}$$

$$dB_W = \frac{\mu_0 IR}{2\pi r^3}\,dl$$

Ponieważ:

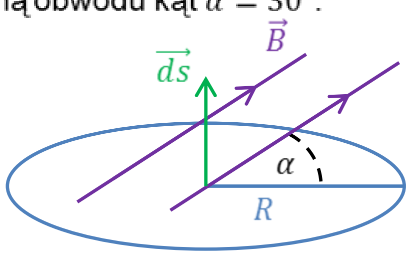
$$r = \sqrt{R^2 + H^2}$$

Więc:

$$dB_W = \frac{\mu_0 IR\,dl}{2\pi\left(\sqrt{R^2 + H^2}\right)^3}$$

$$B_w = \int_0^{\pi R} \frac{\mu_0 IR\,dl}{2\pi\left(\sqrt{R^2 + H^2}\right)^3} = \frac{\mu_0 IR^2\pi}{2\pi\left(\sqrt{R^2 + H^2}\right)^3} = \frac{\mu_0 IR^2}{2\left(\sqrt{R^2 + H^2}\right)^3}$$

Zadanie 15.
Obwód w kształcie okręgu o promieniu R znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji magnetycznej $B = B_0 t^3$. $B_0 = const > 0$ a t – czas. Linie sił pola magnetycznego tworzą z płaszczyzną obwodu kąt $\alpha = 30°$.
Znaleźć siłę elektromotoryczną indukowaną w obwodzie.



Rozwiązanie:
Korzystamy z prawa indukcji Faradaya:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\boldsymbol{\Phi}_B}{dt}$$

Strumień indukcji pola magnetycznego przechodzący przez powierzchnię S ograniczoną obwodem można zapisać następująco:

$$\boldsymbol{\Phi}_B = \int_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_S B \cdot dS\, cos(90° - \alpha) = B\, sin\alpha \int_S dS = B\, sin\alpha \cdot S = B_0 t^3\, sin\alpha \cdot \pi R^2$$

Stąd siła elektromotoryczna indukowana w obwodzie:

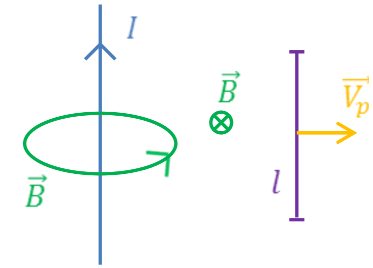
$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\boldsymbol{\Phi}_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B_0 t^3\, sin\alpha\, \pi R^2) = -3B_0 t^2\, sin\alpha\, \pi R^2$$

Uwzględniając, że $\alpha = 30°$

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{3}{2} B_0 t^2 \pi R^2$$

Zadanie 16.

W prostoliniowym nieskończonym przewodniku płynie prąd o natężeniu I. Równolegle do przewodnika, w odległości b od niego, leży pręt o długości l. W pewnej chwili pręt zaczyna się oddalać od przewodnika ze stałą prędkością V_p w ten sposób, że pozostaje przez cały czas do niego równoległy. Znaleźć siłę elektromotoryczną indukowaną w pręcie.



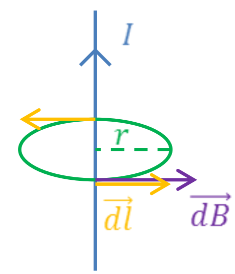
Rozwiązanie:

Z prawa Ampera znajdujemy zależność indukcji pola magnetycznego $\vec{B}$ wytwarzanego przez prostoliniowy przewodnik od odległości r od niego.

$$\int_L \vec{B}\, \overrightarrow{dl} = \int_L B\, dl\, cos0° = \int_L B\, dl = B \cdot L = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

Stąd:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

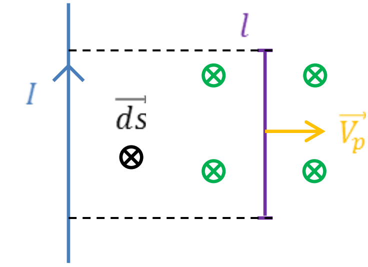


Odległość pręta od przewodnika zmienia się zgodnie ze wzorem:

$$r = b + V_p t$$

Zgodnie z prawem Faradaya SEM indukowana w pręcie:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\boldsymbol{\Phi}_B}{dt} = -\frac{\vec{B}\cdot\overrightarrow{ds}}{dt} = -\frac{B\ ds\ cos0^\circ}{dt} = -BlV_p = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\ lV_p$$



$\overrightarrow{ds}$ - wektor powierzchni

Ostatecznie:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(b + V_p t)}\ lV_p$$

Zadanie 17.

Pręt o długości l obraca się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$ wokół osi prostopadłej do niego, przechodzącej przez jego koniec. Linie pola magnetycznego są prostopadłe do płaszczyzny, w której obraca się pręt. Wyznaczyć siłę elektromotoryczną indukowaną w pręcie.

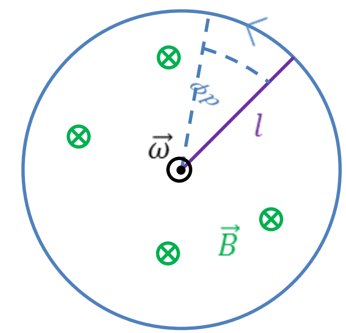
Rozwiązanie:

Wirujący pręt w czasie dt zakreśla obszar:

$$dS = \frac{1}{2} l^2\ d\varphi \quad \text{(pole wycinka koła)}$$

Zatem strumień pola magnetycznego, jaki przecina pręt w czasie dt jest równy:

$$d\boldsymbol{\Phi} = \vec{B}\cdot\overrightarrow{dS} = B\cdot dS\ cos180^\circ = -B\ dS = -B\cdot\frac{1}{2}l^2\ d\varphi$$



$\overrightarrow{dS}$ - wektor prostopadły do płaszczyzny w której obraca się pręt, ma kierunek i zwrot $\vec{\omega}$

Z prawa Faradaya siła elektromotoryczna indukowana w pręcie wyraża się wzorem:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\boldsymbol{\Phi}_B}{dt} = \frac{1}{2}\frac{Bl^2\ d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}Bl^2\omega$$

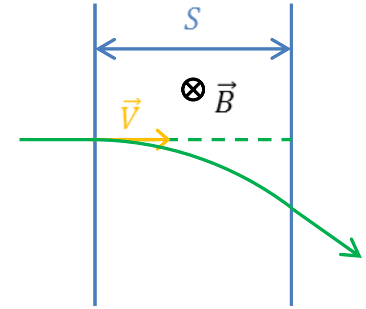
Można powyższy związek zapisać za pomocą wektorów:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{1}{2}l^2\ \vec{B}\cdot\vec{\omega}$$

Zadanie 18.

Wiązka elektronów przyśpieszonych napięciem U wlatuje w obszar jednorodnego pola magnetycznego o indukcji $\vec{B}$ i szerokości S. Znaleźć przesunięcie wiązki elektronów od jej pierwotnego kierunku. m – masa elektronu.

Rozwiązanie:
Wiązka elektronów w polu magnetycznym porusza się po okręgu o promieniu r.
Promień tego okręgu można znaleźć z siły Lorentza, ponieważ ona jest w tym przypadku siłą dośrodkową.



$$\vec{F_L} = q(\vec{V} \times \vec{B})$$

W tym przypadku $\vec{V}$ jest prostopadłe do $\vec{B}$, więc:

$$F_L = eVB\,sin90° = eVB$$

gdzie e – ładunek elektronu

Siła dośrodkowa:

$$F_d = F_L$$
$$\frac{mV^2}{r} = eVB$$

Stąd promień okręgu:

$$r = \frac{mV}{eB}$$

Elektrony uzyskały energię kinetyczną w wyniku przyspieszania w polu elektrycznym:

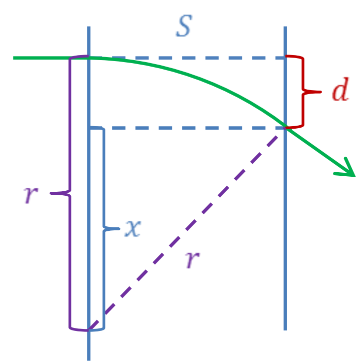
$$E_K = eU$$
$$\frac{mV^2}{2} = eU$$
$$mV = \sqrt{2meU}$$

Wzór na promień przyjmuje następującą postać:

$$r = \frac{\sqrt{2meU}}{eB}$$

Z rysunku widać, że przesunięcie wiązki d można wyrazić przez promień okręgu, po którym się porusza:

$$d = r - x$$
$$x = \sqrt{r^2 - S^2}$$



Czyli:

$$d = r - \sqrt{r^2 - S^2}$$

Podstawiając wzór na promień otrzymujemy ostatecznie:

$$d = \frac{\sqrt{2meU}}{eB} - \sqrt{\frac{2meU}{e^2B^2} - S^2}$$

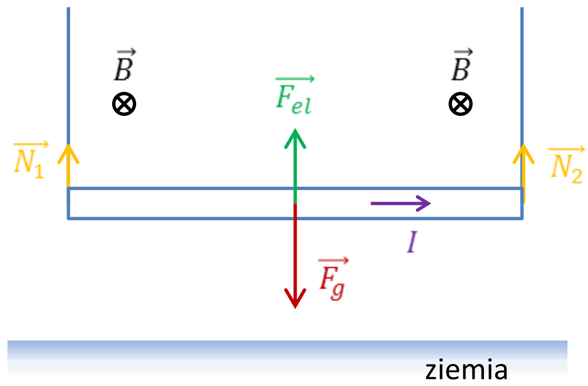
Zadanie 19.
Prostoliniowy przewodnik o długości l i masie m jest zawieszony na dwóch nitkach. W przewodniku płynie prąd o natężeniu I. Linie sił jednorodnego pola magnetycznego o indukcji B są równoległe do powierzchni ziemi i prostopadłe do przewodnika. Znaleźć naciągi nici dla dwóch przeciwnych zwrotów wektora indukcji B.

Rozwiązanie:

a)

$\vec{B}$ ma zwrot za płaszczyznę rysunku.
Wówczas siła elektrodynamiczna działa w górę.
$\vec{F_g}$ - siła ciężkości, $\vec{F_{el}}$ - siła elektrodynamiczna
Siły naciągu nici:

$$N_1 = N_2 = \frac{F_g - F_{el}}{2}$$



Ponieważ:

$$F_g = mg$$
$$F_{el} = BIl$$

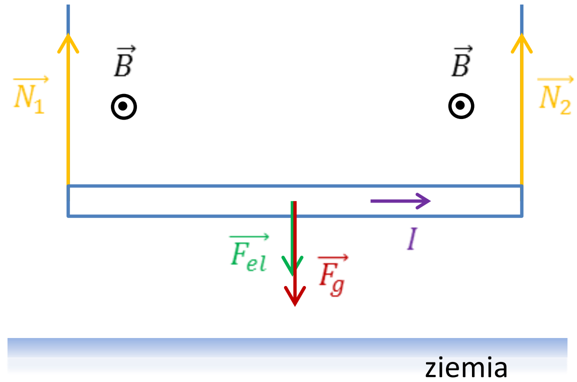
Stąd:

$$N_1 = N_2 = \frac{mg - BIl}{2}$$

b)

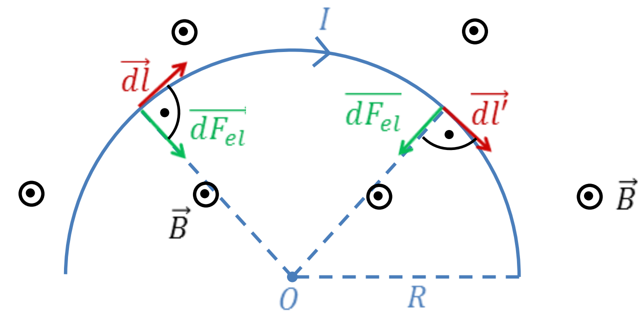
$\vec{B}$ ma zwrot przed płaszczyznę rysunku.
Wówczas siła elektrodynamiczna skierowana jest w dół.
W tym przypadku:

$$N_1 = N_2 = \frac{F_g + F_{el}}{2} = \frac{mg + BIl}{2}$$



Zadanie 20.

Przewodnik w kształcie półokręgu o promieniu R znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$, którego linie są prostopadłe do niego. Znaleźć siłę elektrodynamiczną, która działa na ten przewodnik gdy płynie w nim prąd o natężeniu I.



Rozwiązanie:
Podzielmy przewodnik na małe elementy o długości dl.
Na każdy element przewodnika działa siła elektrodynamiczna:

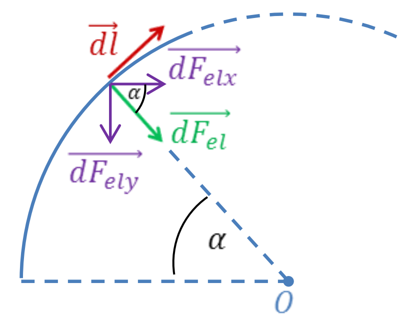
$$\overrightarrow{dF_{el}} = I(\vec{dl} \times \vec{B})$$

Ponieważ $\vec{dl}$ jest prostopadłe do $\vec{B}$, więc:

$$dF_{el} = I\ dl\ B\ sin90° = I \cdot dl\ B$$

Siła ta jest skierowana do środka okręgu.
Jeśli weźmiemy dwa elementy przewodnika położone symetrycznie, wówczas składowe poziome siły zniosą się. Zostaną tylko składowe pionowe.

$$\frac{dF_{ely}}{dF_{el}} = sin\alpha$$



Stąd:

$$dF_{ely} = dF_{el}\ sin\alpha = I\ dl\ B\ sin\alpha$$

Składowe pionowe zsumowane dają siłę elektrodynamiczną działającą na cały przewodnik. Wykorzystując związek między długością łuku a kątem:

$$dl = R_{d\alpha}$$

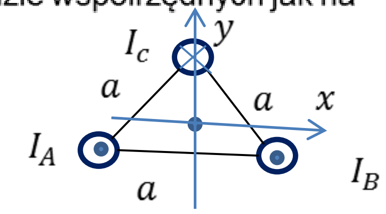
Mamy:

$$F_{ely} = \int_0^\pi IRB\ sin\alpha\ d\alpha = -IRB\ cos\alpha \Big|_0^\pi = 2IRB$$

Zatem na przewodnik działa siła wypadkowa o wartości $2IRB$ skierowana pionowo w dół.

Zadanie 1.
Wyprowadzić wzór na pojemność kondensatora walcowego o długości l, którego wewnętrzna okładka jest walcem o promieniu R_1, a zewnętrzna walcem o promieniu R_2 współosiowym z okładką wewnętrzną. Zaniedbać niejednorodności pola na końcach kondensatora.
(Odp.: $C = \frac{2\pi l \varepsilon_0}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$**)**

Zadanie 2.
Trzy nieskończone, cienkie, prostoliniowe równoległe do siebie przewodniki przebijają płaszczyznę, do której są prostopadłe, tworząc trójkąt równoboczny o boku a. Znaleźć natężenie pola magnetycznego na osi równoległej do przewodników i przechodzącej przez środek ciężkości trójkąta. Zadanie rozwiązać w układzie współrzędnych jak na rysunku.
(Odp.: $\bar{H} = \frac{1}{4\pi a}\left[\sqrt{3}(-I_B + 2I_C + I_A); -3(I_B + I_A)\right]$**)**



Zadanie 3.
Pręt metalowy o długości b i masie m jest zawieszony na dwóch identycznych niciach. W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\mathbf{B} = const.$ Linie sił pola magnetycznego są skierowane pionowo w dół. Gdy w pręcie zaczyna płynąć prąd stały pręt odchyla się o kąt $\alpha = 30^{\circ}$. Obliczyć natężenie prądu.
(Odp.: $\mathbf{I} = \frac{mg}{bB} * tg\alpha$**)**

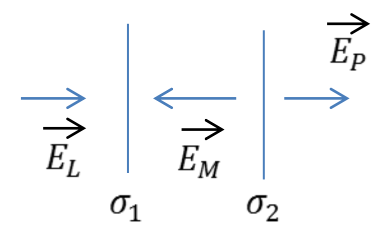
Zadanie 4.
W wierzchołkach sześciokąta foremnego o boku a umieszczono trzy dodatnie i trzy ujemne jednakowe ładunki q. Znaleźć natężenie pola elektrostatycznego w środku sześciokąta.
(Odp.: W zależności od rozmieszczenia ładunków: $E = 0$ **lub** $\mathrm{E} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}$ **lub** $E = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 a^2}$**)**

Zadanie 5.
W wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku a umieszczono trzy ładunki $q_A = q_0$, $q_B = 2q_0$ i $q_C = 3q_0$, gdzie $q_0 > 0$. Znaleźć wartość natężenia pola elektrostatycznego w środku ciężkości tego trójkąta.
(Odp.: $E = \frac{3\sqrt{3}q_0}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$)

Zadanie 6.
Dwa punktowe ładunki elektryczne q i -2q, gdzie(q>0) znajdują się w odległości d od siebie. Na płaszczyźnie, na której znajdują się te ładunki znaleźć równanie linii zerowego potencjału pola elektrostatycznego wytworzonego przez te ładunki.
(Odp.: $\left(x - \frac{5}{6}d\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}d^2$)

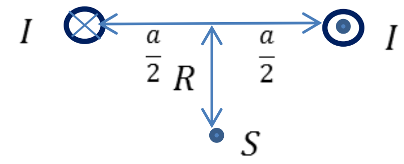
Zadanie 7.
Znaleźć natężenie pola elektrostatycznego w funkcji odległości od środka kuli o promieniu R, która została równomiernie naładowana ze stałą gęstością objętościową ładunku $\rho > 0$.
(Odp.: dla $\mathrm{r} \leq R \quad E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$, dla $\mathrm{r} > R \quad E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$)

Zadanie 8.
Dwa duże nieprzewodzące równoległe arkusze naładowano ładunkami o stałych gęstościach powierzchniowych $\sigma_1 = -2\sigma_0$ i $\sigma_2 = 3\sigma_0$, gdzie $\sigma_0 = const > 0$. Znaleźć natężenie pola elektrycznego w punktach położonych
a) na lewo od arkuszy
b) między arkuszami
c) na prawo od arkuszy
(Odp.: a) $E_L = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$, b) $E_M = \frac{5\sigma_0}{2\varepsilon_0}$, c) $E_P = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$)

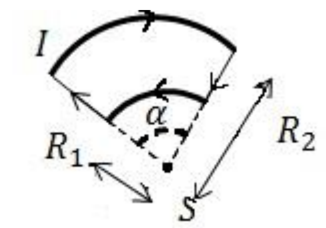


Zadanie 9.
Drut o długości 1m i masie 20g jest zawieszony na dwóch przewodach w polu magnetycznym o indukcji 0,5T. Jaki prąd (natężenie i kierunek) musi płynąć w drucie, aby siły magnetyczne zrównoważyły napięcie przewodów? Linie pola magnetycznego są równoległe do powierzchni Ziemi, prostopadłe do przewodnika i wychodzą z płaszczyzny rysunku.
(Odp.: $\mathrm{I} = 0,4A$, prąd musi płynąć w lewą stronę)

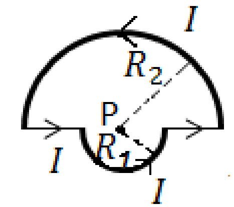
Zadanie 10.
Dwa długie prostoliniowe przewodniki ustawiono równolegle, tak że odległość między nimi wynosi a.
W przewodnikach płyną prądy o tym samym natężeniu I, ale w różnych kierunkach. Znaleźć indukcję pola magnetycznego w punkcie S leżącym na symetralnej odcinka a.
(Odp.: $B=\frac{2\mu_0 I a}{\pi(4R^2+a^2)}$**)**



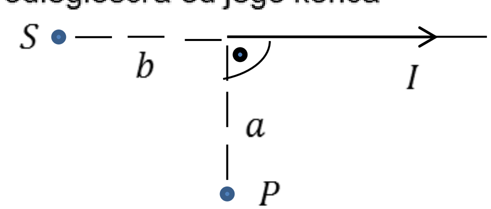
Zadanie 11.
Znaleźć natężenie pola magnetycznego w punkcie S wiedząc, że w obwodzie płynie prąd o natężeniu I. Obwód składa się z dwóch fragmentów okręgów o promieniach R_1 i R_2 i dwóch odcinków leżących na promieniach tych okręgów.
(Odp.: $H=\frac{I\alpha}{4\pi}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$**, zwrot przed płaszczyznę rysunku)**



Zadanie 12.
Znaleźć indukcję pola magnetycznego w punkcie P wiedząc, że w obwodzie płynie prąd o natężeniu I. Obwód składa się z dwóch półokręgów o promieniach R_1 i R_2 oraz dwóch odcinków.
(Odp.: $\mathrm{B}=\frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$**, zwrot przed płaszczyznę rysunku)**

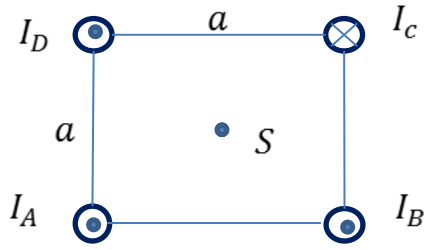


Zadanie 13.
Znaleźć natężenie pola magnetycznego wytworzonego przez prąd o natężeniu I, płynący przez nieskończenie długi i cienki przewodnik.
a) W punkcie P leżącym na prostej prostopadłej do przewodnika, znajdującym się w odległości a od jego końca
b) W punkcie S leżącym na przedłużeniu przewodnika w odległości b od jego końca
(Odp.: a) $H=\frac{1}{4\pi a}$**, b)** $H=0$**)**



Zadanie 14.
Cztery równoległe nieskończone prostoliniowe przewodniki przecinają płaszczyznę prostopadłą do siebie tworząc kwadrat o boku a. W przewodnikach płyną prądy o natężeniach I_A, $I_B = 2I_A$, $I_C = 3I_A$, $I_D = 5I_A$. Znaleźć wartość indukcji pola magnetycznego w środku kwadratu S.

(Odp.: $B = \frac{5\sqrt{2}\mu_0 I_A}{2\pi a}$)



Zadanie 15.
Pręt o długości l wiruje ze stałą prędkością kątową ω, wokół osi prostopadłej do niego i przechodzącej przez jego środek. Pręt znajduje się w stałym, jednorodnym polu magnetycznym o indukcji **B**. Znaleźć siłę elektromotoryczną indukowaną pomiędzy końcami pręta.

(Odp.: $\varepsilon = 0$)

Zadanie 16.
Dwa nieskończone cienkie równoległe przewody znajdują się w odległości d od siebie. W jednym z nich płynie prąd o natężeniu I_A, w drugim o natężeniu $I_B = 3I_A$. Znaleźć położenie punktów, w których natężenie pola magnetycznego równa się zeru, jeśli:

a) Prądy płyną w tych samych kierunkach
b) Prądy płyną w przeciwnych kierunkach

(Odp.: a) na płaszczyźnie, w której leżą przewody między przewodami w odległości $x = \frac{1}{4}d$ od przewodnika I_A
b) Poza przewodnikami na płaszczyźnie w której leżą przewody w odległości $x = \frac{3}{2}a$ od przewodnika I_B)

Zadanie 17.
W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = B_0 * sint$, gdzie: $B_0 = const$, t – czas, znajduje się obwód w kształcie trójkąta równobocznego o boku a. Znaleźć siłę elektromotoryczną indukowaną w tym obwodzie, jeśli linie sił pola magnetycznego tworzą kąt $\alpha = 60°$ z płaszczyzną obwodu.

(Odp.: $\varepsilon_{ind} = -\frac{3}{8}B_0 a^2 * cost$)

Zadanie 18.

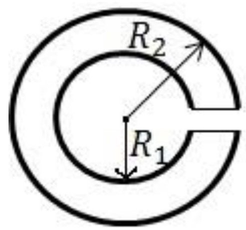
Dwie identyczne cząstki o masie m i ładunku q poruszające się z prędkościami $V_1 = V_2 = V$ wpadają w obszar jednorodnego pola magnetycznego o indukcji B=const. Pierwsza pod kątem α, druga pod kątem β $(\beta < \alpha)$ do linii pola magnetycznego. Jaki musi być odstęp czasu między rozpoczęciem ruchu w polu magnetycznym przez cząstkę pierwszą i drugą, aby cząstki spotkały się.

(Odp.: $\Delta t = \frac{2\pi m}{Bq}\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} - 1\right)$**)**

Zadanie 19.

Obwód składający się z dwóch współśrodkowych, połączonych ze sobą okręgów o promieniach R_1 i R_2 znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = B_0 t^2$ $(B_0 = const, t - czas)$. Linie sił pola magnetycznego są prostopadłe do płaszczyzny obwodu. Wiedząc, że opór obwodu wynosi R znaleźć natężenie prądu płynącego w obwodzie.

(Odp.: $\mathbf{I} = \frac{2\pi B_0}{R}\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)t$ **)**



Zadanie 20.

Pręt o długości l i masie m został położony na dwóch równoległych szynach przewodzących, nachylonych pod kątem α do poziomu. Szyny znajdują się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji **B** = const, którego linie sił są prostopadłe do powierzchni Ziemi i skierowane w dół. Znaleźć maksymalną prędkość jaką może uzyskać pręt, jeśli szyny są na górze zwarte oporem R. Tarcie zaniedbać. Opór pręta i szyn jest równy zeru.

(Odp.: $V_{max} = \frac{2Rmg}{3l^2B^2}$ **)**