Pole grawitacyjne

Zadania z rozwiązaniami

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

Ile wynosi średnia gęstość planety (zakładając jej kulisty kształt) na której doba wynosi 9.9 godzin, a na jej równiku waga sprężynowa wskazuje o 12% mniejszy ciężar niż na biegunie.

Rozwiązanie

$$T = 9{,}9[h] \quad N = 0{,}88Q \quad G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}[\frac{m^3}{kg \cdot s^2}]$$

Ciężar na równiku mierzony przez wagę jest pomniejszony o siłę odśrodkową pochodzącą z ruchu obrotowego planety.

$$Q - N = \frac{mv^2}{R}$$

Podstawiając związki $N = 0{,}88Q$

$$Q = G\frac{m \cdot M}{R^2}$$

Zakładając kulisty kształt planety: $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

Otrzymujemy: $0{,}16G\frac{m \cdot \pi R^3 \rho}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$

Po przekształceniach: $\rho = 6{,}25\frac{v^2}{\pi R^2}$

Należy jeszcze podstawić zależność na prędkość w ruchu obrotowym planety (wokół własnej osi): $v = \frac{2\pi R}{T}$

Wówczas gęstość planety można obliczyć ze wzoru:

$$\rho = 6{,}25\frac{4\pi}{GT^2} = 927[\frac{kg}{m^3}]$$

Zadanie 2

Gwiazda podwójna wykonuje obrót wokół swojego środka masy. Ten układ składa się z gwiazdy o masie 2,02$M_\odot$ oraz białego karła o masie bliskiej masie Słońca. Odległość między nimi wynosi około 8,1 jednostek astronomicznych. Wyznaczyć okres obrotu gwiazdy podwójnej.

Rozwiązanie $M_1 = 2{,}02 M_s \quad M_2 = M_s \qquad R = 8{,}1 R_{ZS} \qquad G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} [\frac{m^3}{kg \cdot s^2}]$

Układ obraca się względem swojego środka masy:

$$d = \frac{R \cdot M_1 + 0 \cdot M_2}{M_1 + M_2} = \frac{R \cdot M_1}{M_1 + M_2} = 5{,}42 R_{ZS}$$

Punkt odniesienia (początek układu) ustalamy w środku białego karła.

Aby układ pozostawał w równowadze musi być spełniony warunek: $F_g = F_{od}$

Zarówno dla gwiazdy jak i białego karła. Te warunki są sobie równoważne, dlatego rozważymy obliczenia dla jednego z nich (gwiazda):

$$G \frac{M_1 M_2}{R^2} = M_1 \frac{v_1^2}{r_1} = M_1 \omega^2 r_1$$

Gdzie r_1 to odległość od środka gwiazdy do środka masy układu podwójnego:

$$G \frac{M_2}{R^2} = \omega^2 (8{,}1 - 5{,}42) R_{ZS}$$

$$G \frac{M_S}{(8{,}1 R_{ZS})^2} = \omega^2 2{,}68 R_{ZS}$$

$$\omega^2 = G \frac{M_S}{175{,}83 (R_{ZS})^3}$$

Teraz można już wyznaczyć okres:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = G\frac{M_S}{175{,}83(R_{ZS})^3}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{175{,}83(R_{ZS})^3}{GM_S}}$$

Podstawiając wartości:

$$R_{ZS} = 149{,}6 \cdot 10^9 [m]$$

$$M_S = 1{,}9891 \cdot 10^{30} [kg]$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{175{,}83(R_{ZS})^3}{GM_S}} = 41{,}9 \cdot 10^6 \left[\sqrt{\frac{m^3}{\frac{m^3}{kg \cdot s^2} kg}} = s\right] \approx 484 \ dni \ ziemskie$$

Zadanie 3

Wyjaśnić występowanie przypływów mórz wynikających z oddziaływania Księżyca.

Rozwiązanie

Księżyc i Ziemia obracają się wokół wspólnego środka masy (patrz zadanie poprzednie).

$$d = \frac{R_{ZK} \cdot M_K + 0 \cdot M_Z}{M_Z + M_K} = \frac{R_{ZK} \cdot M_K}{M_Z + M_K}$$

Na ciało (wodę) działają siły grawitacyjne Ziemi oraz Księżyca, a także siły bezwładności wynikające z obrotu wokół środka masy:

$$a = g - \frac{GM_K}{\left(R_{ZK} - R_Z\right)^2} + \omega^2\left(d - R_Z\right)$$

Pierwszy człon to składowa grawitacyjna Ziemi, drugi człon to przyspieszeni z jakim Księżyc przyciąga wodę na powierzchni Ziemi, a ostatni to składowa siły bezwładności. ω to prędkość kątowa z jaką obracają się elementy naszego układu podwójnego (patrz zadanie poprzednie):

$$\left.\begin{aligned} G\frac{M_Z M_K}{R_{ZK}{}^2} &= M_Z \omega^2 d \\ G\frac{M_Z M_K}{R_{ZK}{}^2} &= M_K \omega^2\left(R_{ZK} - d\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{G}{R_{ZK}^3}\left(M_Z + M_K\right)}$$

Podstawiając: $a = g - \frac{GM_K}{\left(R_{ZK} - R_Z\right)^2} + \frac{GM_K}{R_{ZK}^2} - \frac{GR_Z}{R_{ZK}^3}\left(M_Z + M_K\right)$

Ostatecznie należy pokazać, że powyższe przyspieszenie jest mniejsze niż g. Aby to zrobić należy rozwinąć w szereg drugi składnik powyższej sumy.

$$\frac{1}{(R_{ZK}-R_Z)^2}=\frac{1}{R_{ZK}^2}\left(1-\frac{R_Z}{R_{ZK}}\right)^{-2}=\frac{1}{R_{ZK}^2}\left(1+2\frac{R_Z}{R_{ZK}}\right)+\ldots$$

Otrzymujemy:

$$a=g-\frac{GM_K}{(R_{ZK}-R_Z)^2}+\frac{GM_K}{R_{ZK}^2}-\frac{GR_Z}{R_{ZK}^3}(M_Z+M_K)$$

$$a=g-\frac{GM_K}{R_{ZK}^2}-\frac{2GR_ZM_K}{R_{ZK}^3}+\frac{GM_K}{R_{ZK}^2}-\frac{GR_Z}{R_{ZK}^3}(M_Z+M_K)$$

$$a=g-\frac{GR_Z}{R_{ZK}^3}(M_Z+3M_K)$$

Zadanie 4

Sztuczny satelita porusza się po eliptycznej orbicie. W punkcie najbliższym Ziemi prędkość satelity wynosi 7,75km/s, a w punkcie najdalszym jest równa 5,16km/s. Wyznaczyć odległość satelity od Ziemi w tych punktach.

Rozwiązanie

$$v_1 = 7{,}75\frac{km}{s} \quad v_2 = 5{,}16\frac{km}{s} \quad M_z = 6\cdot 10^{24}kg \qquad G = 6{,}67\cdot 10^{-11}[\frac{m^3}{kg\cdot s^2}]$$

Z zasady zachowania momentu pędu mamy (dla punktów najbliższego oraz najdalszego względem Ziemi):

$$mv_1r_1 = mv_2r_2$$

Z zasady zachowania energii:

$$\frac{mv_1^{\ 2}}{2} - G\frac{Mm}{r_1} = \frac{mv_2^{\ 2}}{2} - G\frac{Mm}{r_2}$$

Szukane odległości to r_1 oraz r_2. Wyznaczając r_1 z pierwszego równania i podstawiając do drugiego otrzymujemy:

$$\frac{v_1^{\ 2}}{2} - G\frac{Mv_1}{r_2v_2} = \frac{v_2^{\ 2}}{2} - G\frac{M}{r_2} \Rightarrow \frac{1}{r_2}GM\left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right) = \frac{v_1^{\ 2}}{2} - \frac{v_2^{\ 2}}{2}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{v_2}{2GM}\frac{\left(v_1^{\ 2} - v_2^{\ 2}\right)}{v_1 - v_2} \Rightarrow r_2 = \frac{2GM}{v_2\left(v_1 + v_2\right)}$$

Ostatecznie:

$$r_2 = \frac{2GM}{v_2\left(v_1 + v_2\right)} \approx 12000km$$

$$r_1 = \frac{v_2r_2}{v_1} \approx 8000km$$

Zadanie 5

Satelita porusza się po orbicie kołowej wokół gwiazdy. W pewnym monecie gwiazda wyrzuca w przestrzeń część swojej masy. Satelita, aby pozostać na orbicie tej gwiazdy musi zmniejszyć promień obiegu o 25%, a prędkość o połowę. Jaką część masy straciła gwiazda?

Rozwiązanie $v_2 = 0{,}5v$ $R_2 = 0{,}75R$ $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}[\frac{m^3}{kg \cdot s^2}]$

Satelita porusza się po orbicie kołowej zatem, siła odśrodkowa równoważy oddziaływanie grawitacyjne:

$$G\frac{mM}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

Po wybuchu mamy następującą zależność

$$G\frac{mM_1}{(0{,}75R)^2} = \frac{m(0{,}5v)^2}{0{,}75R}$$

Dzieląc dolne równanie przez górne:

$$\frac{M_1}{0{,}75M} = (0{,}5)^2$$

$$\frac{M_1}{M} \cdot 100\% = 18{,}75\%$$

Gwiazda straciła: $\Delta M = 81{,}25\%$ swojej masy.

Zadanie 6

Obliczyć zależność przyspieszenia siły ciężkości od głębokości (odległości mierzonej do środka Ziemi) znając przyspieszenie na jej powierzchni.

Rozwiązanie

Jako h oznaczamy głębokość.

Wartość przyspieszenia wewnątrz planety zależy tylko od masy Ziemi znajdującej się w kuli o promieniu R_z-h:

$$F_g = g_{wew} \cdot m = G\frac{mM_{wew}}{(R_z - h)^2}$$

$$g_{wew} = G\frac{M_{wew}}{(R_z - h)^2}$$

M_{wew} to masa kuli jest wyrażona przez (zakładamy jednorodny rozkład gęstości naszej planety):

$$M_{wew} = \frac{4}{3}\pi (R_z - h)^3 \rho$$

Wykorzystując przyspieszenie g na powierzchni Ziemi mamy:

$$\left.\begin{array}{l} M_z = \frac{4}{3}\pi R_z^{\ 3} \rho \\ F = G\frac{mM_z}{R_z^2} = gm \end{array}\right\} \Rightarrow g = \frac{4}{3} G\pi R_z \rho \Rightarrow \rho = \frac{3g}{4G\pi R_z}$$

Po podstawieniu wyznaczonej gęstości do wzoru na masę M_{wew} otrzymujemy:

$$M_{wew} = (R_z - h)^3 \frac{g}{GR_z}$$

Przyspieszenie siły ciężkości w funkcji głębokości jest zatem opisane zależnością:

$$g_{wew}(h) = \frac{(R_z - h)^3 g}{(R_z - h)^2 R_z} = (R_z - h)\frac{g}{R_z}$$

Zadanie 7

Satelita porusza się po orbicie kołowej. Co należy zrobić, aby wprowadzić satelitę na styczną orbitę eliptyczną, aby potem mógł wylądować?

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}[\frac{m^3}{kg \cdot s^2}]$$

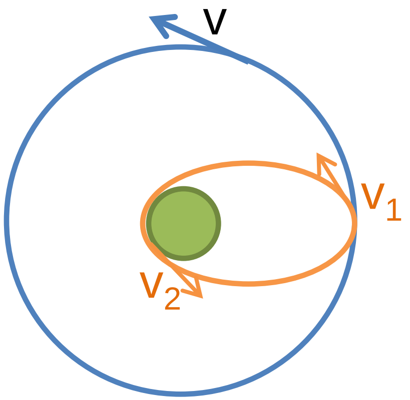
Rozwiązanie

Wyjaśnienie przedstawimy na przykładzie Ziemi.

Załóżmy, że satelita porusza się po orbicie o promieniu R. Wtedy jego prędkość wynosi:

$$F_g = F_d$$

$$G\frac{mM_z}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_z}{R}}$$



Orbita kołowa i eliptyczna satelity

Przejście na orbitę eliptyczną wymaga zmiany prędkości do v_1. Całkowita energia i moment pędu po przejściu na orbitę eliptyczną

$$E_{Elip1} = \frac{mv_1^{\ 2}}{2} - G\frac{mM_z}{R}$$

$$L_{Elip1} = mv_1 R$$

Satelita poruszając się po stycznej orbicie eliptycznej dotrze do Ziemi. Możemy wyznaczyć z jaką prędkością (bez wykonywania hamowania) zetknąłby się z nią. Energia całkowita i moment pędu będą wówczas wynosić:

$$E_{Elip2} = \frac{mv_2^{\ 2}}{2} - G\frac{mM_z}{R_z}$$

$$L_{Elip2} = mv_2 R_z$$

Z zasady zachowania energii i momentu pędu wyznaczymy prędkości v_1 oraz v_2 :

$$mv_1 R = mv_2 R_z \Rightarrow v_1 = \frac{v_2 R_z}{R}$$

$$\frac{mv_1^{\ 2}}{2} - G\frac{mM_z}{R} = \frac{mv_2^{\ 2}}{2} - G\frac{mM_z}{R_z} \Rightarrow \frac{v_2^{\ 2}R_z^{\ 2}}{2R^2} - G\frac{M_z}{R} = \frac{v_2^{\ 2}}{2} - G\frac{M_z}{R_z}$$

$$v_2^{\ 2}\left(\frac{R_z^{\ 2}}{R^2}-1\right)=2GM_z\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_z}\right)$$

$$v_2^{\ 2}=2GM_z\frac{R^2}{\left(R_z^{\ 2}-R^2\right)}\frac{R_z-R}{RR_z}=2GM_z\frac{R}{\left(R_z+R\right)R_z}$$

$$v_2=\sqrt{2GM_z\frac{R}{\left(R_z+R\right)R_z}}$$

$$v_1=\frac{R_z}{R}\sqrt{2GM_z\frac{R}{\left(R_z+R\right)R_z}}=\sqrt{2GM_z\frac{R_z}{\left(R_z+R\right)R}}$$

$$v_1=v\sqrt{\frac{R_z}{\left(R_z+R\right)}}$$

Z ostatniego wzoru wynika, że prędkość satelity musiała zmaleć, aby wszedł na orbitę eliptyczną. Natomiast prędkość z jaką się zetknie z Ziemią wynosić będzie:

$$v_2=\sqrt{2GM_z\frac{R}{\left(R_z+R\right)R_z}}$$

Zadanie 8

Przedyskutować ruch satelity po orbicie znajdującej się na granicy atmosfery ziemskiej. Powszechnie za taką granicę (znaną jako linia Kármána) uznaje się wysokość 100km.

Rozwiązanie

Na granicy atmosfery znajdują się cząsteczki pochodzące z atmosfery. Ich obecność skutkuje występowaniem oporów ruchu. Rozważając ruch po orbicie o promieniu r mamy:

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM_z}{r^2}$$

Po przekształceniach równanie to ma postać:

$$mv^2 = G\frac{mM_z}{r}$$

Po lewej stronie równanie zmienną jest prędkość, po prawej promień orbity. Obecność dodatkowej siły (oporu) będzie wpływać na te wielkości. Zauważmy, że po podzieleniu stronami przez 2 otrzymujemy:

$$\frac{mv^2}{2} = G\frac{mM_z}{2r}$$

$$E_k = -\frac{1}{2}E_p \Rightarrow \Delta E_k = -\frac{1}{2}\Delta E_p$$

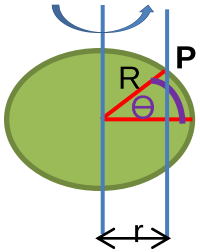
To równanie sugeruje, że zmiany energii kinetycznej tylko w połowie są wykorzystane na zmianę energii potencjalnej. Ale zasada zachowania energii musi być spełniona, dlatego pozostała wartość energii jest przekazywana cząsteczkom gazu. W ten sposób obecność atmosfery powoduje zmniejszanie promienia orbity – wówczas satelita zaczyna poruszać się z coraz większą prędkością.

Zadanie 9

Ruch obrotowy planety skutkuje jej spłaszczeniem na biegunie. Jaki jest wtedy kształt planety?

Rozwiązanie

Rozważmy ruch obrotowy planety:



R-odległość do środka masy obracającej się planety, r – odległość od osi obrotu Θ – to szerokość geograficzna.

Pomiędzy zaznaczonymi odległościami jest związek: $r = R\cos\theta$

Na ciało znajdujące się na powierzchni planety w punkcie P działają dwie siły:

$$F_{od} = m\omega^2 r$$

$$F_g = G\frac{mM_p}{R^2}$$

Odśrodkowej sile bezwładności można przypisać energię potencjalną zgodnie ze związkiem: $F = -\nabla E$

$$E = -\int m\omega^2 r dr = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

Powierzchnia planety stanowi obszar stałego potencjału (powierzchnia ekwipotencjalna) – nie ma wtedy jej odkształceń, dlatego zachodzi:

$$-\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - G\frac{M_p}{R} = const$$

Rozważmy dwa charakterystyczne miejsca planety: równik i jej biegun:

$$-\frac{1}{2}\omega^2 R_r^{\ 2} - G\frac{M_p}{R_r} = -G\frac{M_p}{R_b}$$

Poszukujemy związku między odległością od środka masy planety do równika oraz bieguna. Dokonujemy przekształceń poprzedniego równania:

$$\frac{1}{2}\omega^2 R_r{}^3 + GM_p = G\frac{M_z R_r}{R_b}$$

$$\frac{1}{2}\omega^2 R_r{}^3 R_b + GM_p R_b = GM_p R_r \Rightarrow R_r - R_b = \frac{\omega^2 R_r{}^3 R_b}{2GM_p} \qquad (1)$$

(1)

$$\frac{R_r}{R_b} - 1 = \frac{\omega^2 R_r{}^3}{2GM_p} \Rightarrow \frac{R_r}{R_b} = 1 + \frac{\omega^2 R_r{}^3}{2GM_p}$$

Na równiku musi zachodzić także (siła odśrodkowa mniejsza od grawitacyjnej):

$$m\omega^2 R_r \le G\frac{mM_p}{R_r^2} \Rightarrow \omega^2 R_r{}^3 \le GM_p$$

Wstawiając do poprzedniego wyniku: $\frac{R_r}{R_b} = 1 + \frac{\omega^2 R_r{}^3}{2GM_p} \le 1 + \frac{GM_p}{2GM_p} = \frac{3}{2}$

Z drugiej strony ten iloraz promień jest ograniczony wartością 1:

$$1 \le \frac{R_r}{R_b} \le \frac{3}{2} \qquad (2)$$

Spłaszczenie na biegunie jest opisane wyznaczonymi zależnościami (1) oraz (2). Wynika z tego, że niemożliwym jest aby dowolnie duża wartość prędkości obrotowej planety doprowadziła do ogromnego spłaszczenia planety – patrz równanie (2).

W astronomii używa się pojęcia spłaszczenie s: $s = \frac{R_r - R_b}{R_b}$

Zadanie 10

Rozważmy hipotetyczna sytuację, w której na powierzchni planety zostaje „rozrzucona” dodatkowa materia. Jak zmieni się wówczas wartość przyspieszenia grawitacyjnego? Co ma wpływ na wynik?

Rozwiązanie

Dyskusja wymaga dodatkowych założeń dotyczących objętości (V) oraz masy tej dodatkowej materii (M).

Promień planety R zwiększa się o pewną długość r, związaną z dodatkową masą. Początkowe przyciąganie grawitacyjne planety określamy jako g_p, natomiast po dodaniu materii g_k:

$$g_p = G\frac{M_p}{R^2}$$

$$g_k = G\frac{M + M_p}{(R+r)^2}$$

Jeżeli zachodzi r<<R, to możemy wyrażenie na g_k rozwinąć w szereg:

$$g_k = G\frac{M + M_p}{(R+r)^2} = G\frac{M + M_p}{R^2\left(1+\frac{r}{R}\right)^2} \approx G\frac{M + M_p}{R^2}\left(1-2\frac{r}{R}\right)$$

Wówczas otrzymujemy:

$$g_k \approx G\frac{M + M_p}{R^2} - 2\frac{r}{R}G\frac{M + M_p}{R^2} = \frac{GM_p}{R^2}\left(1-2\frac{r}{R}\right) + \frac{GM}{R^2}\left(1-2\frac{r}{R}\right)$$

Nieznaną wartość ma nadal r, aby je wyznaczyć skorzystamy z warunku na zachowanie objętości

$$V_p = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 + V = \frac{4}{3}\pi(R+r)^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3\left(1+\frac{r}{R}\right)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 \approx \frac{4}{3}\pi R^3\left(1+3\frac{r}{R}\right) - \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V = 4\pi R^2 r \Rightarrow \frac{V}{4\pi R^2} = r$$

Wtedy nowa wartość przyspieszenia grawitacyjnego planety:

$$g_k \approx \frac{GM_p}{R^2}\left(1 - 2\frac{V}{4\pi R^3}\right) + \frac{GM}{R^2}\left(1 - 2\frac{V}{4\pi R^3}\right)$$

$$g_k \approx \frac{GM_p}{R^2}\left(1 - \frac{V}{2\pi R^3}\right) + \frac{GM}{R^2}\left(1 - \frac{V}{2\pi R^3}\right) = \frac{G(M_p + M)}{R^2}\left(1 - \frac{V}{2\pi R^3}\right) \quad (1)$$

Związek między M oraz V to gęstość dosypanej materii, dlatego wyrażenie na przyspieszenie przepiszemy w postaci:

$$g_k \approx \frac{G(M_p + \rho V)}{R^2}\left(1 - \frac{V}{2\pi R^3}\right) = -\frac{G\rho V^2}{2\pi R^5} + V\left(-\frac{GM_p}{2\pi R^5} + \frac{G\rho}{R^2}\right) + \frac{GM_p}{R^2} \qquad (2)$$

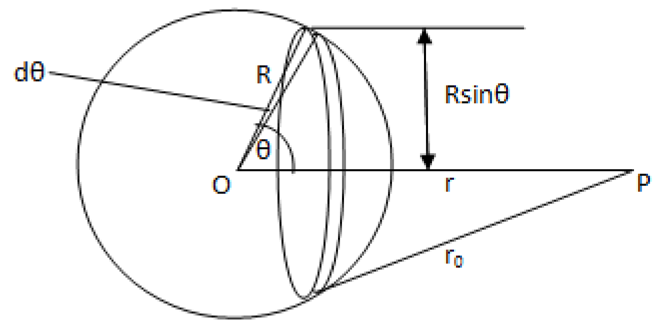
$$g_k \approx \frac{G(M_p + \rho V)}{R^2}\left(1 - \frac{V}{2\pi R^3}\right) = -\frac{G\rho V^2}{2\pi R^5} + V\left(-\frac{6G\rho_p}{R^2} + \frac{G\rho}{R^2}\right) + \frac{GM_p}{R^2}$$

Przedstawione wyniki sugerują dwie odpowiedzi. Przyspieszenie może zarówno wzrosnąć, jak i zmaleć – paradoksalnie dosypanie masy może zmniejszyć przyspieszenie. Wynik zależy od dobranych mas oraz objętości, dlatego gęstość dosypywanej materii wpływa bezpośrednio na wynik.

Zadanie 11

Wyznaczyć pole grawitacyjne sfery o masie *M* i promieniu *R* (planeta wydrążona w środku).

Rozwiązanie:



Rozważmy punkt *P* znajdujący się w odległości $r > R$ od środka powłoki *O*. Powłokę dzielimy na pierścienie w ten sposób, że rozpatrywany punkt leży na prostej, przechodzącej przez środki wszystkich pierścieni. Szerokość pierścienia wynosi $Rd\theta$, gdzie θ jest kątem pomiędzy promieniem kuli wyznaczającym położenie pierścienia i wyróżnioną prostą. Powierzchnia pierścienia wynosi:

$$dS = 2\pi R \sin\theta \, R d\theta = 2\pi R^2 \sin\theta \, d\theta$$

A masa pierścienia:

$$dm = \frac{M}{4\pi R^2} dS = \frac{M}{4\pi R^2} 2\pi R^2 \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{2} M \sin\theta \, d\theta$$

Potencjał pola grawitacyjnego pochodzącego od omawianego pierścienia wynosi w punkcie *P*:

$$d\phi(r) = -\frac{Gdm}{r_0}$$

Bierze się to stąd, że każdy element tego pierścienia daje takie samo pole (potencjał), czyli r_0 jest stałe. Potencjały dodaje się jak zwykłe skalary, zaś sumaryczna masa wszystkich elementów, z których składa się ten pierścień, wynosi *dm*.
Dla ustalonych *r* i *R* można wyrazić zmianę kąta przez zmianę r_0. Ponieważ:

$$r_0^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$$

$$2r_0\,dr_0 = 2Rr\sin\theta\,d\theta$$

$$\sin\theta\,d\theta = \frac{r_0\,dr_0}{Rr}$$

Wstawiając to teraz do wzoru na potencjał:

$$d\phi(r) = -\frac{G}{r_0}\frac{1}{2}M\sin\theta\,d\theta = \frac{-GM}{2r_0}\frac{r_0\,dr_0}{Rr} = -\frac{GM}{2rR}dr_0$$

Potencjał pola grawitacyjnego od wszystkich pierścieni wynosi w *P*:

$$\phi(r) = \int d\phi(r) = \int_{r-R}^{r+R}\left(-\frac{GM}{2rR}\right)dr_0 = -\frac{GM}{2rR}2R = -\frac{GM}{r}$$

Natężenie pola grawitacyjnego w tym punkcie wynosi:

$$\vec{\gamma}(r) = -\nabla\phi(r) = -\frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

W celu znalezienia $\phi(r)$ oraz $\vec{\gamma}(r)$ dla *r* < *R* zmieniamy granice całkowania:

$$\phi(r) = \int_{R-r}^{R+r}\left(-\frac{GM}{2rR}\right)dr_0 = -\frac{GM}{2Rr}2r = -\frac{GM}{R}$$

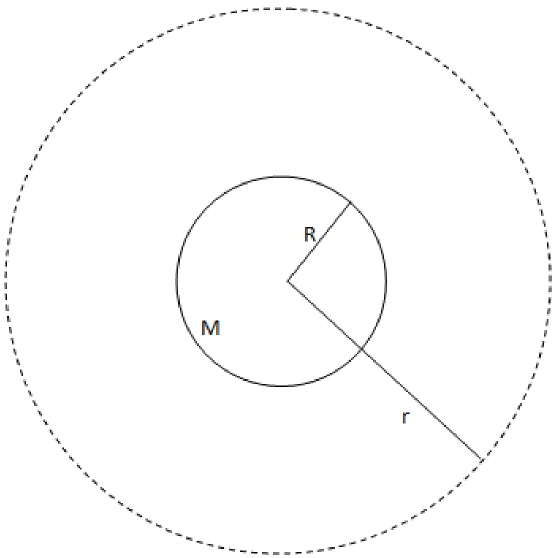
Stąd, ponieważ gradient wartości stałej jest równy zero, to: $\vec{\gamma}(r) = -\nabla\phi(r) = 0$

Wewnątrz powłoki sferycznej potencjał pola grawitacyjnego (a zatem i energia potencjalna ciała o masie *m*) ma wartość stałą, natomiast natężenie tego pola (jak również siła grawitacji działająca na ciało) jest równa zero.

Zadanie 12

Rozwiązać zadanie poprzednie korzystając z prawa Gaussa.

Rozwiązanie:



Linią ciągłą została narysowana sfera o promieniu *R* i o masie *M*. Szukamy pola w odległości *r* od środka planety. W tym celu korzystamy z prawa Gaussa dla pola grawitacyjnego:

$$\oiint \vec{\gamma} \cdot \overrightarrow{dS} = -4\pi GM$$

Przy czym:

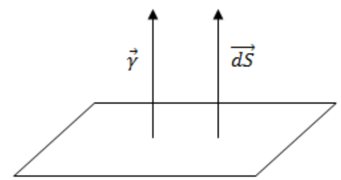
$\vec{\gamma}$ - wektor natężenia pola grawitacyjnego

G – stała grawitacyjna

Otaczamy naszą planetą wyimaginowaną sferą o promieniu r. Możemy sobie wyobrazić, że ta wyimaginowana sfera podzielona jest na małe kawałki o powierzchni *dS*. Takiej małej powierzchni *dS* możemy również przypisać wektor powierzchniowy $\overrightarrow{dS}$,

którego zwrot jest skierowany prostopadle do powierzchni sfery w kierunku środka planety, a wartość równa jest powierzchni takiego kawałka. Istotne jest również, że masa *M* w prawie Gaussa oznacza masę zawartą wewnątrz wyimaginowanej sfery. Zatem inna planeta znajdująca się w pobliżu nie będzie dawała tu żadnego wkładu.

W tym miejscu trzeba poczynić dwie istotne uwagi:



Po pierwsze na takim kawałku wektory pola grawitacyjnego oraz powierzchniowy są do siebie równoległe i oba są skierowane w kierunku środka planety. Po drugie pole grawitacyjne jest takie samo na każdym kawałku, a więc jest stałe na powierzchni całej wyimaginowanej sfery.

$$\oiint \vec{\gamma} \cdot \overrightarrow{dS} = \oiint |\vec{\gamma}||\overrightarrow{dS}| = |\vec{\gamma}| \oiint |\overrightarrow{dS}| = |\vec{\gamma}| 4\pi r^2$$

W pierwszym kroku skorzystaliśmy z uwagi pierwszej i dzięki temu, że wektory są równoległe, można było zastąpić iloczyn skalarny wektorów zwykłym iloczynem ich wartości. W drugim kroku natężenie pola grawitacyjnego, które jest stałe na powierzchni wyimaginowanej sfery, można było wyciągnąć przed znak całki. Całka więc sumuje tylko pola powierzchni małych kawałków, czyli w rezultacie da nam pole powierzchni wyimaginowanej sfery. Porównując więc ten rezultat z prawą stroną prawa Gaussa i skracając wyrazy podobne otrzymujemy:

$$|\vec{\gamma}| = -\frac{GM}{r^2}$$

Rezultat ten jest oczywiście słuszny jedynie dla $r > R$. Gdy $r < R$, czyli znajdujemy się wewnątrz planety, nasza wyimaginowana sfera nie obejmuje żadnej masy (planeta jest pusta w środku), a zatem prawa strona prawa Gaussa jest równa zero i pole grawitacyjne jest równe zero.

Zadanie 13

Jaką pracę trzeba wykonać, aby ciało o masie m przenieść ze środka planety o masie *M* i promieniu *R* do nieskończoności?

Jeśli mamy do czynienia z planetą pełną w środku, to pole grawitacyjne ma wartość:

$$\vec{\gamma} = -G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\ dla\ r > R$$

$$\vec{\gamma} = -G\frac{Mr}{R^3}\frac{\vec{r}}{r}\ dla\ r < R$$

Przypomnijmy, że $\vec{\gamma}$ to wektor pola grawitacyjnego, *G* to stała grawitacyjna

$\frac{\vec{r}}{r}$ to po prostu wersor (jednostkowy wektor), którego długość jest równa 1 i który jest skierowany radialnie na zewnątrz.

Znak minus oznacza, że pole jest skierowane radialnie do wewnątrz planety. Aby otrzymać siłę działającą na ciało o masie *m*, wystarczy pomnożyć wektor pola grawitacyjnego przez masę *m*:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\ dla\ r > R$$

$$\vec{F} = -G\frac{Mmr}{R^3}\frac{\vec{r}}{r}\ dla\ r < R$$

Pracę możemy policzyć ze wzoru:

$$W = -\int \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$$

$\overrightarrow{dl}$ jest jednostkowym wektorem skierowanym w kierunku, w którym odbywa się całkowanie. Jeśli odbywa się w kierunku radialnym, to wektor ten ma postać $\frac{\vec{r}}{r}dr$ przy czym dr jest infinitezymalnym przesunięciem w kierunku radialnym. Praca będzie więc wynosić:

$$W = -\left(\int_0^R -G\frac{Mmr}{R^3}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}dr + \int_R^{+\infty} -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}dr\right)$$
$$= \int_0^R G\frac{Mmr}{R^3}dr + \int_R^{+\infty} G\frac{Mm}{r^2}dr = \frac{1}{2}\frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{R}$$

Przy przenoszeniu ciała z wnętrza planety do nieskończoności, praca wynosi:

$$W = \frac{3}{2}\frac{GMm}{R}$$

Zadanie 14
Przez środek Ziemi wydrążono tunel łączący biegun północny i południowy. Z bieguna północnego wpuszczono do tego tunelu ciało o masie *m*. Masa Ziemi wynosi *M* zaś jej promień *R*. Jaki będzie okres biegu tak skonstruowanego oscylatora harmonicznego z bieguna północnego na południowy i z powrotem?

Rozwiązanie:
Z poprzedniego zadania wiemy, że siła działająca w tym przypadku na ciało, wynosić będzie:

$$\vec{F} = -G\frac{Mmr}{R^3}\frac{\vec{r}}{r} \; dla \, r < R$$

Jest to siła skierowana zawsze w kierunku środka Ziemi i proporcjonalna do odległości *r* tego ciała od środka Ziemi. Jest to więc zwykły oscylator harmoniczny, który działa pod wpływem siły:

$$F = -kr$$

Siła ta została tu zapisana w sposób skalarny, a więc bez wersora $\frac{\vec{r}}{r}$ skierowanego od środka Ziemi na zewnątrz. W zapisie skalarnym wciąż jednak mamy informację o ruchu zwrotnym ciała pod wpływem tej siły (znak „-''). Stała sprężystości *k* będzie więc wynosić w tym przypadku:

$$k = \frac{GMm}{R^3}$$

Korzystając ze wzoru na częstotliwość drgań oscylatora harmonicznego:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

widać, że częstotliwość ta będzie w naszym przypadku wynosić:

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3} \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

Stąd okres obiegu wynosi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1

Ile okres obrotu planety wokół własnej osi jeżeli jej gęstość wynosi 6 g/cm^3, a waga sprężynowa umieszczona na równiku wskazuje ciężar o 6% mniejszy niż na biegunie?

Rozwiązanie $T = 17{,}4[h]$

Zadanie 2

Gwiazda podwójna wykonuje obrót wokół swojego środka masy, a odległość między nimi wynosi R. Jaka jest całkowita masa tego układu, jeśli prędkość kątowa obrotu jest równa ω?

Odpowiedź: $M_1 + M_2 = \frac{R^3\omega^2}{G}$

Zadanie 3

Sztuczny satelita porusza się po eliptycznej orbicie. W punkcie najbliższym Ziemi odległość do satelity wynosi r_1, a w punkcie najdalszym jest równa r_2. Wyznaczyć prędkość satelity w tych punktach.

Odpowiedź: $v_1 = \frac{2GM_z}{r_1 + r_2}$ $v_2 = \frac{2GM_z}{r_1 + r_2}\frac{r_1}{r_2}$

Zadanie 4

Wyjaśnić, dlaczego przypływy mórz występują w tym samym czasie po przeciwnych stronach naszego globu?

Odpowiedź: Całkowite przyspieszenie sił działających po dwóch przeciwległych punktach jest takie samo.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Po stronie Księżyca} & a = g - \frac{GM_K}{(R_{ZK} - R_Z)^2} + \omega^2(d - R_Z) \\ \text{Po przeciwnej stronie} & a = g - \frac{GM_K}{(R_{ZK} + R_Z)^2} + \omega^2(d + R_Z) \end{array}\right\} \Rightarrow a = g - \frac{GR_Z}{R_{ZK}^3}(M_Z + 3M_K)$$

Zadanie 5

Satelita porusza się po orbicie kołowej wokół planety o promieniu R. W pewnym monecie satelita zwiększył odległość od planety połowę. Z jaką prędkością powinien się teraz poruszać? Prędkość początkowa satelity wynosiła v a wysokość na jakiej się znajdowała to h.

Odpowiedź: musi zmniejszyć swoją prędkość do $v_2 = \frac{GM}{\frac{GM}{v^2} + \frac{1}{2}h}$

Zadanie 6

Czy istnienie pierścieni Saturna można wyjaśnić na podstawie występowania odśrodkowej siły bezwładności?

Rozwiązanie: Pierścienie Saturna to w rzeczywistości lodowe ciała o bardzo różnej wielkości (ale stosunkowo małe) poruszające się niczym satelity wokół tej planety - pod tym względem istotny jest udział siły odśrodkowej. Pochodzenie pierścieni jest tylko domniemane (skutek zderzenia satelitów Saturna), ale obraz pierścieni (o grubości ok. 20m), które są w obszarze równikowym planety stwarza pozory, że ich pochodzenie to także efekt siły odśrodkowej.

Zadanie 7

Wewnętrzna krawędź pierścieni Saturna obraca się szybciej niż zewnętrzna. O czym to świadczy?

Podpowiedź: wyznaczyć wzór na prędkość liniową satelity.

Rozwiązanie: pierścienie Saturna zbudowane są z drobnych satelitów (pierścienie nie są jednolite).

Zadanie 8

Jaki jest okres orbitalny planety, której promień równikowy wynosi 3402,5km, a promień biegunowy 3377,4km. Masa planety wynosi $6{,}4185 \cdot 10^{23}$ kg.

Rozwiązanie: okres orbitalny wynosi 13,7h

Zadanie 9

Która planeta układu Słonecznego ma największe spłaszczenie? Czy można to oszacować bez wykonywania obliczeń?

Rozwiązanie: Spłaszczenie jest opisane wzorem: $s = \frac{R_r - R_b}{R_b} = \frac{\omega^2 R_r^{\ 3}}{2GM_p} \propto \frac{\omega^2}{\rho}$

Planeta o małej gęstości i krótkim okresie obrotowym będzie miała największe spłaszczenie – tą planetą jest Saturn.

Zadanie 10

Satelita Ziemi poruszający się po orbicie kołowej zszedł na styczną orbitę eliptyczną. Wylądował osiągając prędkość 8,33km/s. Z jakiej wysokości nad Ziemią rozpoczął lądowanie?

Rozwiązanie: Lądowanie rozpoczął z wysokości ok. 1620 km nad powierzchnią Ziemi (promień orbity satelity 8000km)

Zadanie 11

Wyznaczyć pole grawitacyjne planety o masie *M* i promieniu *R* (planeta pełna w środku)

Odp. $$r > R \Rightarrow |\vec{\gamma}(r)| = -\frac{GM}{r^2}$$

$$r < R \Rightarrow |\vec{\gamma}(r)| = -\frac{GMr}{R^3}$$

Zadanie 12

Korzystając z prawa Gaussa rozwiązać poprzednie zadanie.
Wskazówka:
W przypadku pola na zewnątrz rozwiązanie jest identyczne, jak w przypadku planety pustej w środku. Wewnątrz zmieni się to, że tym razem wyimaginowana sfera będzie obejmowała pewną nieznaną masę M_1, która jest ułamkiem całkowitej masy planety *M*. W prawie Gaussa będzie więc występowała masa M_1 (obejmowana przez wyimaginowaną sferę) i trzeba ją zastąpić znaną masą *M* planety, korzystając z proporcji:

$$\frac{M_1}{M} = \frac{4\pi r^3}{4\pi R^3}$$

Zadanie 13

Korzystając z prawa Gaussa znaleźć pole grawitacyjne planety o promieniu R_2, wewnątrz której znajduje się dziura o symetrii sferycznej i promieniu R_1. Planeta i dziura są współśrodkowe. Masa planety wynosi M.

Odp. $r > R_1 \Rightarrow |\vec{\gamma}(r)| = -\dfrac{GM}{r^2}$

$$R_1 > r > R_2 \Rightarrow |\vec{\gamma}(r)| = -\frac{GM}{r^2}\frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}$$

$$r < R_2 \Rightarrow |\vec{\gamma}(r)| = 0$$

Zadanie 14

Jaką pracę trzeba wykonać, aby przenieść ciało o masie m ze środka planety o masie M i promieniu R do nieskończoności? Planeta jest pusta w środku (a więc wewnątrz nie ma pola grawitacyjnego).

Odp. $W = \dfrac{GMm}{R}$

Zadanie 15

Jaką pracę trzeba wykonać, aby przenieść ciało o masie m z bieguna północnego na biegun południowy idąc tunelem wydrążonym przez środek Ziemi? Odpowiedź uzasadnij.

Odp. $W = 0$.

Zadanie 16
Jaką pracę trzeba wykonać, aby przenieść ciało o masie *m* z bieguna północnego Ziemi na biegun południowy idąc wzdłuż jednego z południków? Odpowiedź uzasadnij.

Odp. $W = 0$.

Zadanie 17
Obliczyć pierwszą prędkość kosmiczną Ziemi, czyli prędkość potrzebną, aby ciało mogło znaleźć się na orbicie Ziemi.

Odp.

$$v_I = \sqrt{\frac{GM}{R}} = 7{,}91\ km/s$$

Zadanie 18
Obliczyć drugą prędkość kosmiczną Ziemi, czyli prędkość potrzebną, aby ciało mogło znaleźć się w nieskończonej odległości od naszej planety.

Odp.

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 2\sqrt{v_I} = 11{,}19\ km/s$$