Pole elektryczne

Problemy i zagadnienia

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

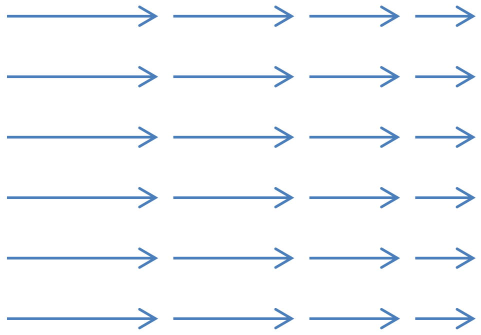
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

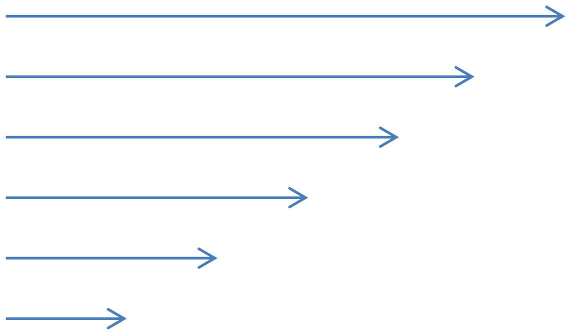
Zagadnienie 1

Czy można uformować w próżni, pod nieobecność pola magnetycznego takie pole elektryczne, w którym wektory natężenia pola wyglądałyby w sposób przedstawiony na rysunku a) lub na rysunku b)

a)



b)



Odpowiedź

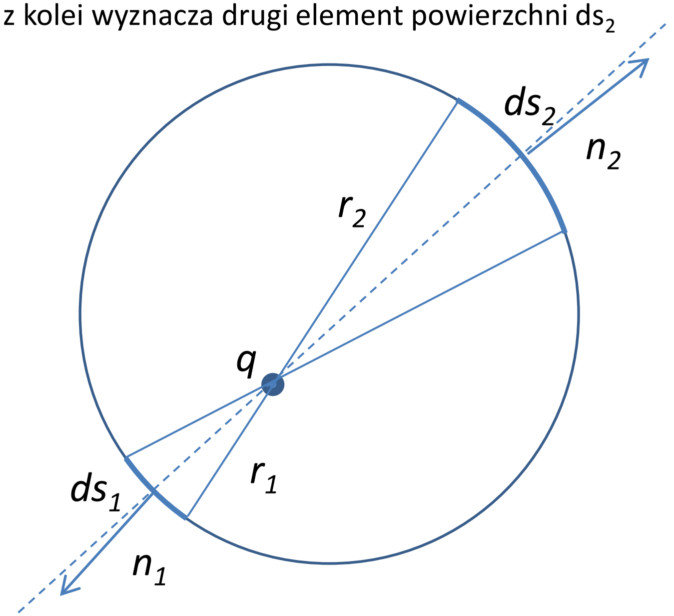
Żadne z opisanych pól nie może istnieć w próżni pod nieobecność pola magnetycznego. Pole przedstawione na rysunku a) jest niezgodne z prawem Gaussa dla próżni. Istnienie takiego pola wymagałoby obecności ładunku. Z kolei pole na rysunku b) wymagałoby, aby rotacja wektora E wzdłuż konturu zamkniętego była różna od zera. Zgodnie z prawem indukcji Faradaya oznaczałoby to istnienie zmiennego w czasie pola magnetycznego , co jest niezgodne z warunkami jakie rozpatrujemy.

Zagadnienie 2

Z prawa Gaussa wynika, że natężenie pola elektrycznego wewnątrz naładowanej sfery wynosi zero. Jeśli wewnątrz sfery umieścimy ładunek q, to będzie się on znajdował poza obszarem pola wytwarzanym przez sferę. Naładowana sfera znajduje się jednak w obszarze pola wytwarzanego przez ładunek *q* doznając działania pewnej siły. W ten sposób dochodzimy do wniosku, że naładowana sfera nie oddziałuje na ładunek *q* jednocześnie sama doświadczając działania siły pochodzącej od ładunku. Powyższe stwierdzenie stoi w sprzeczności z trzecią zasadą dynamiki Newtona. Jak wytłumaczyć tą sprzeczność?

Odpowiedź

Należy rozpatrzyć siły wywierane na sferę przez ładunek *q*. Całkowita siła działająca na powłokę jest sumą sił działających na małe elementy jej powierzchni. Wybierzmy element powierzchni ds_1 znajdujący się w odległości r_1 od ładunku q. Element powierzchni ds_1 i punkt w którym znajduje się ładunek *q* wyznaczają kąt bryłowy $d\Omega$, który z kolei wyznacza drugi element powierzchni ds_2 znajdujący się po drugiej stronie ładunku q. Jeżeli sfera jest naładowana z gęstością powierzchniową σ, to ładunki zgromadzone na elementach powierzchni wynoszą odpowiednio: $dq_1 = \sigma ds_1$ i $dq_2 = \sigma ds_2$. Niech r_1 i r_2 oznaczają odległości ładunku q od ds_1 i ds_2. Kąt $d\Omega$ może być wtedy wyrażony jako:



$$d\Omega = \frac{ds_1}{r_1^2}\cos(r_1, n_1) = \frac{ds_2}{r_2^2}\cos(r_2, n_2)$$

gdzie n_1 i n_2 są wektorami normalnymi (prostopadłymi) do ds_1 i ds_2.

Można zauważyć, że kąty miedzy n_1 i ds_1 oraz między n_2 i ds_2 są takie same na podstawie czego można stwierdzić, że:

$$\frac{ds_1}{r_1^2} = \frac{ds_2}{r_2^2}$$

Mnożąc powyższe równanie obustronnie przez σq mamy:

$$\frac{qdq_1}{r_1^2} = \frac{qdq_2}{r_2^2}$$

co w sposób oczywisty oznacza, że wartości sił działających nads_1 i ds_2 są takie same. Zwroty tych sił są przeciwne, tak więc wypadkowa siła działająca na sferę wynosi zero. Powyższe rozumowanie jest prawdziwe dla dowolnie wybranego elementu ds_1 i odpowiadającego mu elementu i ds_2.

W analizowanym problemie nie występuje więc sprzeczność z trzecią zasadą dynamiki Newtona. Dowiedliśmy, że pomimo iż naładowana sfera znajduje się w polu wytwarzanym przez zawarty wewnątrz niej ładunek punktowy, nie doświadcza ona, podobnie jak ładunek punktowy, działania żadnej siły.

Zagadnienie 3

Czy możliwe jest wytworzenie takiego rozkład ładunku, aby pochodzące od niego pole elektryczne było radialnie symetryczne, a wartość natężenia była niezależna od odległości od centrum i stała (niezerowa) w całej przestrzeni. Jeśli tak, to jak powinien wyglądać taki rozkład?

Odpowiedź

Z warunków zadania wynika, że:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = const$$

gdzie Q oznacza ładunek zawarty wewnątrz powierzchni sferycznej o promieniu r. Oznaczmy przez $\rho(r)$ gęstość objętościową ładunku. Korzystając z twierdzenia Gaussa możemy napisać:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_0^r \rho(r)dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_0^r \rho(r)4\pi r^2 dr = const$$

Powyższe równanie prowadzi do warunku

$$\int_0^r \rho(r) r^2 dr = r^2 \cdot const$$

Różniczkując, otrzymujemy warunek

$$\rho(r) = \frac{const}{r}$$

Spełnienie warunków zadania oznacza więc, że dla $r \rightarrow 0$ gęstość ładunku rośnie do nieskończoności. Wytworzenie takiego układu ładunku jest więc w praktyce niemożliwe.

Zagadnienie 4

Rozważmy dwie metalowe kulki naładowane taki samym ładunkiem elektrycznym. Kulki takie mają takie same potencjały, tak więc zetknięcie ze sobą takich kul nie spowoduje zmiany potencjału. Czy jeśli dwie jednakowo naładowane kulki z płynnej rtęci zetkniemy i połączymy w jedną kulkę to również nie nastąpi zmiana potencjału?

Odpowiedź

Potencjał obu jednakowych kulek rtęci jest taki sam i wynosi

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

gdzie r oznacza promień, a Q ładunek każdej z kulek. Na skutek połączenia dwóch kulek w jedną, powstanie kulka o objętości równej sumie objętości obu kulek i zawierająca ładunek 2Q. Wykonując elementarne rachunki otrzymujemy promień powstałej kulki

$$R = r\sqrt[3]{2}$$

Potencjał nowej kulki wynosi

$$V' = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}V$$

Otrzymany wynik oznacza, że potencjał układu nie jest stały, lecz rośnie $\sqrt[3]{4}$ razy.

Zagadnienie 5

Dwie jednakowe metalowe kule są naładowane ładunkami Q_1 =Q/4 i Q_2=3Q/4. Jeżeli odległość między środkami kul wynosi d to energia wzajemnego oddziaływania kul wynosi:

$$W = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{3Q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}$$

Kule zostają połączone cienkim drutem (o pomijalnej pojemności elektrycznej), w wyniku czego ładunku na obu kulach wyrównują się. Po usunięciu druty ładunki obu kul wynoszą więc Q/2. Energia ich oddziaływania jest teraz równa:

$$W' = \frac{Q/2 \cdot Q/2}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}$$

Możemy zauważyć, że W'>W co oznacza, że energia oddziaływania kul wzrosła. Skąd wzięła się dodatkowa energia? Czy powyższy wynik można pogodzić z zasadą zachowania energii?

Odpowiedź

Paradoks wynika z tego, że w powyższym rozumowaniu pomijamy część energii układu. Na całkowitą energię układa składa się energia wzajemnego oddziaływania obu kule oraz energia oddziaływania ładunków zgromadzonych w każdej z kul z osobna. Całkowita energia układu może być zapisana jako

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1^2}{2R} + \frac{Q_2^2}{2R} + \frac{Q_1 Q_2}{d}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1^2}{2R} + \frac{(Q-Q_1)^2}{2R} + \frac{Q_1(Q-Q_1)}{d}\right)$$

gdzie R oznacza promień kuli, a $Q=Q_1+Q_2$ Ekstremum powyższego wyrażenia możemy wyznaczyć przyrównując pochodną po Q_1 do zera. Wykonując elementarne rachunki otrzymujemy ekstremum dla $Q_1=Q/2$. Badając drugą pochodną mamy:

$$\frac{d^2W}{dQ_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d}\right)$$

Ponieważ d>R, druga pochodna jest większa od zera. Oznacza to, że całkowita energia układu osiąga minimum przy równym podziale ładunku Q.

Przytoczone w zagadnieniu obliczenia energii przed i po połączeniu są więc nieprawidłowe, prowadząc do niepoprawnych wniosków. Jeżeli wykonamy obliczenia w sposób prawidłowy, zauważymy, że W’ jest w rzeczywistości mniejsze od W. Różnica energii odpowiada ciepłu wydzielonemu podczas przepływu ładunków między kulami.

Warto zauważyć, że jeżeli w analogiczny sposób zbadamy ekstremum wyrażenia pomijającego oddziaływanie między ładunkami wewnątrz kul

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{d} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1\left(Q - Q_1\right)}{d}$$

otrzymamy maksimum. Powyższy fakt został wykorzystany do zbudowania paradoksu.

Zagadnienie 6

Płaski kondensator próżniowy o pojemności C i odległości między okładkami d został naładowany do napięcia U, a następnie odłączony od źródła napięcia. Kondensator został umieszczony poziomo. Pomiędzy okładki kondensatora został wprowadzony okruch metalu, który zaczął przeskakiwać z okładki do okładki. Wyjaśnij dlaczego tak się dzieje oraz, zakładając, że okruch ma postać małej kulki o promieniu r i masie m oraz że zderzenia z okładkami są niesprężyste, oblicz ilość zderzeń z okładkami.

Odpowiedź

Okruch metalu po zetknięciu z okładką kondensatora uzyskuje ładunek takiego znaku jak ładunek okładki. Okruch jest więc przyciągany przez drugą okładkę, zderza się z nią, następuje przeładowanie i przeskok na przeciwległa okładkę. Przeskakujący tam i z powrotem i przenoszący ładunek kawałek metalu powoduje, że różnica potencjału między okładkami maleje. Proces będzie więc trwał do momentu, aż siła grawitacji działająca na okruch nie przeważy sił elektrostatycznych.

Załóżmy, że okruch jest na tyle mały, że jego zetknięcie z okładką nie zmienia potencjału okładki. Przyjmijmy też, że potencjały okładek wynoszą +V i –V. Zetknąwszy się z okładką uzyskuje ładunek q określony przez promień kulki oraz potencjał okładki:

$$q = 4\pi\varepsilon_0 rV$$

Na skutek dn zderzeń ładunek na kondensatorze zmieni się o wielkość dQ:

$$dQ = 2qdn$$

Czynnik 2 w powyższym wyrażeniu wynika z faktu, że przy każdym zderzeniu ładunek kulki zmienia się o 2q (np. oddaje ładunek q i pobiera ładunek -q). Przez n będziemy rozumieć jako liczbę zderzeń z jedną okładką i będziemy dla ułatwienia traktować formalnie jako wielkość ciągłą. Napięcie na kondensatorze U=2V oraz dQ=CdU. Możemy więc napisać:

$$dQ = 4\pi\varepsilon_0 2rVdn = CdU$$

Stąd wynika

$$dn = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{C}{r}\frac{dU}{U}$$

Ruch kulki ustanie, gdy napięcie na kondensatorze spadnie do wartości krytycznej U_k poniżej której przeważa siła grawitacji.

Napięcie to można wyznaczyć ze związku

$$q\frac{U_k}{d} = mg$$

Wstawiając wyrażenie na q mamy

$$U_k = \left(\frac{mgd}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^{1/2}$$

Liczba zderzeń do momentu ustania przeskoków jest określona przez całkę po napięciu od napięcia początkowego U_0 do U_k

$$n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{C}{r}\int_{U_0}^{U_k}\frac{dU}{U} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{C}{r}\ln\left[\frac{1}{U_0}\left(\frac{mgd}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^{1/2}\right]$$

Zagadnienie 7

Niewielka metalowa płyta jest ustawiona równolegle do bardzo dużej uziemionej płyty. Jeżeli na mniejszej płycie znajduje się ładunek Q, to jej oddziaływanie z uziemioną płaszczyzną jest równoważne oddziaływaniu z ładunkiem-obrazem, zatem energia oddziaływania jest równa

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2d}$$

gdzie d oznacza odległość między płytami. Jeżeli przez C oznaczymy pojemność rozpatrywanego układu to energia takiego kondensatora wynosi

$$W = \frac{Q^2}{2C}$$

Porównanie obu wzorów prowadzi do wniosku, że

$$C = 4\pi\varepsilon_0 d$$

Oczywistym faktem jest, że rozpatrywany układ dwu płyt stanowi rodzaj kondensatora płaskiego, zatem jego pojemność powinna być odwrotnie proporcjonalna do d, co jest ewidentnie sprzeczne z otrzymanym wynikiem.

Jaki błąd został popełniony w powyższym rozumowaniu?

Odpowiedź

Błąd polega na założeniu, że prawidłowy jest wzór na energię oddziaływania małej płyty z duża. Wzór ten jest poprawny jedynie dla ładunku punktowego i nie może być zastosowany w powyższym problemie.

Zagadnienie 8

Ładunek punktowy Q znajduje się w odległości d od nieskończenie dużej, uziemionej płaszczyzny przewodzącej. Aby znaleźć energię potencjalną takiego układu należy obliczyć prace potrzebną na przeniesienie tego ładunku z nieskończoności do punktu odległego o a od płaszczyzny. Jeżeli ładunek jest w odległości x od płaszczyzny to działa na niego siła

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(2x)^2}$$

Praca potrzebna na przeniesienie ładunku jest więc równa

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{x}\frac{Q^2}{4x^2}dx = -\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}$$

Z drugiej strony wiadomo, że oddziaływanie z uziemioną płaszczyzną jest równoważne oddziaływaniu dwóch różnoimiennych ładunków znajdujących się w odległości 2d od siebie. Energia potencjalna takiego układu jest równa

$$W' = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 d}$$

Wyjaśnij który z powyższych rezultatów jest poprawny.

Odpowiedź

Oprócz zmian energii układu wynikających z przesuwania ładunku, następuje zmiana energii związana z przemieszczeniami ładunku w samej płycie. Oznacza to, że pewna ilość energii wydziela się w postaci ciepła. W rozumowaniu opartym jedynie na obliczaniu pracy na przeniesienie ładunku punktowego pomijany jest fakt przemieszczania się również ładunków indukowanych, tak więc otrzymana wartość W jest nieprawidłowa. Poprawny jest wynik drugi (W’).

Zagadnienie 9

Rozważmy problem pracy potrzebnej na przesunięcie ładunku elektrycznego równolegle do nieskończonej, uziemionej płaszczyzny przewodzącej. Wartość energii oddziaływania ładunku z płaszczyzną wynosi

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2d}$$

gdzie d oznacza odległość ładunku Q od płaszczyzny. Ponieważ podczas przesuwania ładunku nie zmienia się odległość d, to nie zmienia się energia potencjalna układu, czyli praca przesunięcia jest równa zero.

Odpowiedź

Przesuwanie ładunku punktowego równolegle do płaszczyzny powoduje ruch ładunków indukowanych. Z ruchem tym związane jest wydzielenie pewnej ilości ciepła. Energia potencjalna układu ładunek-płaszczyzna nie ulega jednak zmianie. Praca przesunięcia zamieniania jest w całości na energię wypromieniowywaną z układu.

Wyjaśnienie problemu można przedstawić także za pomocą analogii mechanicznej. Przesuwanie ciała po poziomej płaszczyźnie nie powoduje zmiany energii potencjalnej układu, wymaga jednak wykonania pewnej pracy w celu pokonania sił tarcia. Praca sił tarcia jest w całości zamieniana na ciepło.

Zagadnienie 10

Ładunek punktowy porusza się swobodnie wzdłuż osi uziemionej metalowej rury składającej się z dwu odcinków o różnych średnicach. Czy przejście ładunku do odcinka o mniejszej średnicy spowoduje zmianę jego prędkości?

Odpowiedź

Problem można rozpatrzeć posługując się metodą obrazów. Oddziaływanie ładunku punktowego z uziemioną płaszczyzną przewodzącą jest równoważne oddziaływaniu tego ładunku z jego obrazem zwierciadlanym. Obrazem zwierciadlanym ładunku punktowego w przypadku płaszczyzny („zwierciadła” płaskiego) jest punkt, natomiast w przypadku symetrii osiowej, obrazem punktu jest pierścień, którego promień zależeć będzie od promienia rury („zwierciadła” cylindrycznego). Promień pierścienia będzie tym większy, im większy będzie promień rury. Wartość potencjału układu ładunek-rura będzie natomiast tym większa im mniejszy promień rury. Przejście ładunku do odcinka o mniejszym promieniu będzie więc równoznaczne z przejściem do obszaru o większej wartości potencjału. Wynika stąd, że prędkość ładunku musi wzrosnąć.

Zagadnienie 11

Powłoka balonika jest naładowana ładunkiem o stałej gęstości powierzchniowej, dzięki czemu balonik przybrał kształt sfery o promieniu R. W powłoce jest otworek, przez która wyrównują się ciśnienia. Jak duży jest ładunek balonika jeżeli nie naładowany balonik ma taką samą średnicę wówczas, gdy ciśnienie w jego wnętrzu jest o Δp większe od ciśnienia atmosferycznego?

Odpowiedź

Naładowany balonik jest sferą o promieniu R, której pojemność wynosi

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Jeżeli założymy, że przed naładowaniem balon miał kształt sfery, to energia balonu tuż po naładowaniu wynosiła

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Odpychanie ładunków prowadzi do zmiany promienia balonu. Wzrost promienia o dR prowadzi do zmiany energii o dW

$$dW = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2} dR$$

Gdy balon jest nienaładowany, wtedy podwyższenie ciśnienia w jego wnętrzu o Δp prowadzi również do zmiany promienia o dR.

Praca związana ze zmianą objętości V wynosi

$$dW' = \Delta p dV = \Delta p 4\pi R^2 dR$$

Zgodnie z warunkami zadania powinna zachodzić równość dW=-dW', czyli

$$Q = 4\pi R^2 \sqrt{2\varepsilon_0 \Delta p}$$

Zagadnienie 12

Do wnętrza naładowanego balonika z poprzedniego zadania wprowadzono ładunek punktowy q takiego samego znaku, jak ładunek zgromadzony na powłoce. Rozważmy następujące dwa rodzaje argumentacji:

1. Ponieważ ładunki jednoimienne odpychają się, dowolny element powłoki balonu będzie odpychany przez ładunek q, czyli po wprowadzeniu ładunku średnica balonu wzrośnie.
2. Ponieważ wewnątrz naładowanej powłoki sferycznej natężenie pola wynosi zero, nie ma oddziaływania między powłoką i ładunkiem q, czyli średnica balonu nie zmieni się

Który z powyższych toków rozumowania jest poprawny?

Odpowiedź

Poprawne jest pierwsze rozumowanie. Błąd w drugim rozumowaniu polega na tym, że zaniedbuje ono pole od ładunku punktowego. Wewnątrz powłoki pole nie wynosi zero, tak więc ładunek zgromadzony na powłoce znajduje się w polu ładunku punktowego i oddziałuje z polem.

Zagadnienie 13

Rozpatrzmy naładowany o odłączony od źródła napięcia kondensator kulisty o promieniach okładek R_1 i $R_2 > R_1$. Czy jeżeli przesuniemy okładki względem siebie w taki sposób, że nie będą one współśrodkowe, to pojemność wzrośnie czy zmaleje?

Odpowiedź

Współśrodkowe położenie wewnętrznej okładki sferycznej jest położeniem równowagi nietrwałej. Oznacza to, że dowolnie małe wychylenie z położenia równowagi powoduje wytrącenie z tego położenia. Przy wychyleniu środkowej okładki, będzie ona poruszać się dalej pod wpływem sił elektrostatycznej. Praca tych sił będzie wykonywana kosztem energii kondensatora. Przy stałym ładunku na kondensatorze jego energia określona jest przez wyrażenie $W=Q^2/2C$, więc zmniejszenie energii odpowiada wzrost pojemności.

Zagadnienie 14

Pojemność klasycznego kondensatora próżniowego zależy jedynie od jego geometrii (kształtu, rozmiaru itp.) i jest niezależna od ładunku zgromadzonego na okładkach. Jak powinien być skonstruowany kondensator, którego pojemność zależałaby od ładunku na okładkach?

Odpowiedź

Kondensator, którego pojemność zależy od ładunku zgromadzonego na okładkach, powinien być skonstruowany w taki sposób, że zmiana ładunku powoduje zmianę jednego z parametrów determinujących pojemność. Przykładem takiego rozwiązania może być kondensator płaski, którego okładki połączone są (nieprzewodzącą) sprężyną. W takim kondensatorze wzrost ładunku na okładkach powoduje ich przyciąganie i zbliżenie okładek. Siła działająca na każdą z okładek wynosi

$$F = \frac{EQ}{2}$$

gdzie E jest natężeniem pola w obszarze między okładkami wynoszącym

$$E = \frac{Q}{S\varepsilon_0}$$

gdzie S jest powierzchnią okładek. Tak więc siła F wynosi

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

W sytuacji równowagi siła ta jest równoważona przez siłę sprężystości

$$\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} = k\left(d_0 - d\right)$$

gdzie k jest stałą sprężystości, d_0 swobodną długością sprężyny a d jej długością aktualną

Ponieważ pojemność kondensatora płaskiego dana jest wyrażeniem

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Łącząc dwa ostatnie równania mamy

$$C = \frac{C_0}{1 - \beta C_0 Q^2}$$

gdzie

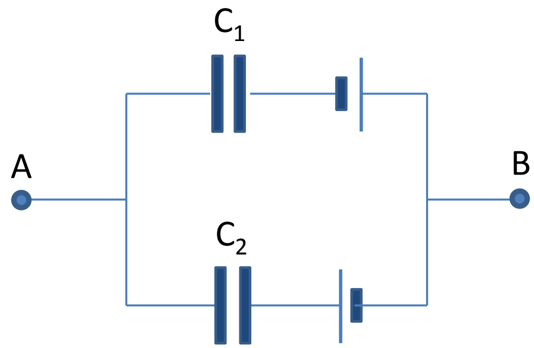
$$C_0 \equiv \frac{\varepsilon_0 S}{d_0} \qquad \beta \equiv \frac{1}{2k\varepsilon_0^2 S^2}$$

Pojemność rozpatrywanego kondensatora zależy więc od ładunku, a zatem również od przyłożonego napięcia. Przeanalizujmy powyższe wyrażenie na pojemność. Dla małych ładunków Q pojemność C wynosi w przybliżeniu C_0. Podobnie w przypadku gdy sprężyny są bardzo twarde ($k \to \infty$) $C \approx C_0$. W ogólności jednak wraz ze wzrostem ładunku rośnie również pojemność C, dążąc do nieskończoności gdy $Q \to (2k\varepsilon_0 S d_0)^{1/2}$.

Zagadnienie 15

Układ na poniższym rysunku zawiera dwie identyczne baterie, każda będąca źródłem napięcia U_0. Jeżeli między punktami A i B zostanie przyłożona różnica potencjału U to napięcia na kondensatorach C_1 i C_2 będą wynosiły odpowiednio $U+U_0$ i $U-U_0$, tak więc ładunki zgromadzone na kondensatorach będą wynosić $Q_1=C_1(U+U_0)$ i $Q_2=C_2(U-U_0)$. Jeżeli przez C oznaczymy równoważną pojemność takiego układu między punktami A i B to powinien być prawdziwy związek $CU=Q_1+Q_2=C_1(U+U_0)+C_2(U-U_0)$ czyli $C=C_1+C_2+(C_1-C_2)(U_0/U)$. Wynika z tego, że pojemność układu powinna zależeć od przyłożonego napięcia. Co więcej, przy odpowiednim doborze parametrów pojemność C może być ujemna, a dla niskich napięć dąży do nieskończoności.

Czy powyższy wywód jest poprawny i czy pojemność C ma w rzeczywistości takie właściwości?



Odpowiedź

Zauważmy, że rozpatrywany układ nie jest klasycznym kondensatorem i użycie w odniesieniu do niego pojęcia pojemności jest raczej sztuczne. Należy zastanowić się, czy powszechnie używane określenia i definicje mają w tym przypadku zastosowanie.

Po pierwsze dla U=0 na okładkach kondensatorów C_1 i C_2 znajdują się ładunki, co oznacza że ładunek zgromadzony w układzie („kondensatorze”) dla U≠0 nie jest ładunkiem dostarczonym do „kondensatora” podczas ładowania.

Po drugie należy zmodyfikować pojęcie naładowania bądź rozładowania. Typowy kondensator, gdy jest naładowany stanowi magazyn energii, która jest zwracana w procesie rozładowywania. Kondensator rozładowany (zwarty) ma zerową energię, czyli zerowe napięcie między okładkami. W rozpatrywanym „kondensatorze” zerowemu napięciu między punktami A i B odpowiada niezerowa energia. Rozładowanie „kondensatora”nie oznacza więc pobrania całej zgromadzonej w nim energii.

Po trzecie, jeżeli chcemy, żeby nienaładowanemu kondensatorowi odpowiadało napięcie U=0, to końce A i B nie mogą być swobodne gdyż w przeciwnym przypadku napięcie U będzie różne od zera. Oznacza to, że pojemność „kondensatora” w obwodzie nie musi być równa pojemności swobodnego „kondensatora”.

W świetle powyższych uwag, najwygodniej jest określić pojemność „kondensatora” za pomocą związków energetycznych.

Punktem odniesienia dla naszych rozważań będzie energia układu dla U=0, czyli rozpatrywać będziemy tyko przyrost energii spowodowany przyłożeniem napięcia U (cześć energii, którą można odzyskać rozładowując „kondensator” przez zwarcie końców A i B). Energia „kondensatora” podłączonego do źródła napięcia U wynosi

$$W = \frac{1}{2}C_1(U + U_0)^2 + \frac{1}{2}C_2(U - U_0)^2$$

Energia „kondensatora” rozładowanego (końce A i B zwarte) jest równa

$$W' = \frac{1}{2}C_1 U_0{}^2 + \frac{1}{2}C_2 U_0{}^2$$

Różnica energii obu stanów wynosi

$$\Delta W = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U^2 + (C_1 - C_2)UU_0$$

Chcemy aby pojemność „kondensatora” C była określona przez dodatkową energię ΔW, więc możemy napisać

$$\frac{1}{2}CU^2 = \Delta W$$

Skąd mamy wyrażenie na pojemność

$$C = C_1 + C_2 + 2(C_1 - C_2)\frac{U_0}{U}$$

Zdefiniowana przez nas pojemność „kondensatora” jest więc rzeczywiście funkcją napięcia U i dąży do nieskończoności dla U dążącego do zera. Łatwo też zauważyć, że jeśli C1<C2 to dla pewnego zakresu napięć U pojemność C jest mniejsza od zera. Zgodnie z przyjętą definicją pojemności oznacza to, że energia układu jest mniejsza od energii zwartego „kondensatora” (jest jednak większa od zera w skali bezwzględnej).

Zagadnienie 16

Jeżeli ładunki zgromadzone na okładkach kondensator są różnoimienne to wielkość U występująca w wyrażeniu na pojemność $C=Q/U$ ma sens różnicy potencjału między okładkami. W przypadku gdy ładunki na okładkach są jednoimienne należy wnioskować, że różnica potencjału wynosi zero. Jak w takim przypadku zdefiniować pojemność kondensatora? Czy w takim przypadku wzór $C=\varepsilon_0 S/d$ opisujący pojemność kondensatora płaskiego zachowuje słuszność?

Odpowiedź

W wyrażeniu $C=Q/U$, wielkość U oznacza różnicę potencjału między powierzchniami ekwipotencjalnymi (okładkami) ograniczającymi obszar, w którym występuje niezerowe pole elektryczne. W przepadku okładek naładowanych jednoimiennie U należy rozumieć jako różnicę potencjału między okładkami a Ziemią.

Pojemność kondensatora naładowanego jednoimiennymi ładunkami możemy określić rozpatrując jego energię. Energia ta może być określona na podstawie wzoru $W=Q^2/2C$ i jest równa energii pola elektrycznego wytworzonego przez ładunki na okładkach. Zmianie pojemności przez rozsunięcie (bądź zbliżenie) okładek towarzyszy wytworzenie (bądź unicestwienie) pola w pewnym obszarze przestrzeni. Energia pola jest proporcjonalna do kwadratu wartości natężenia pola E, czyli nie zależy od znaku ładunków będących źródłem pola. Tak więc, na mocy wzoru $W=Q^2/2C$ można wnioskować, że w przypadku równoimiennie naładowanych okładek pojemność kondensatora płaskiego może być określona wzorem $C=\varepsilon_0 S/d$

Zagadnienie 17

Energia naładowanego kondensatora wyraża się wzorem $W_1=Q^2/2C$. Jeżeli po naładowaniu kondensator zostanie odłączony od źródła napięcia, a następnie całkowicie zanurzony w cieczy o względnej przenikalności ε to jego ładunek pozostanie niezmieniony, natomiast pojemność wzrośnie ε razy. Energia zanurzonego w cieczy kondensatora będzie więc wynosić $W_2=Q^2/2\,\varepsilon\,C$ czyli zmaleje ε razy w porównaniu z wartością początkową. Jak tą zmianę pogodzić z zasadą zachowania energii? Co stało się z częścią energii?

Odpowiedź

Rozpatrzmy sytuację, w której zamiast cieczy mamy płytkę wykonaną z dielektryka. Płytka taka jest wciągana w obszar między okładkami na skutek oddziaływania ładunków na okładkach z ładunkami powierzchniowymi indukowanymi na powierzchniach płytki. Dielektryk jest więc wciągany między okładki, a następnie na skutek bezwładności wysuwa się z kondensatora po przeciwnej stronie, po czym jest wciągany z powrotem. Proces ten miałby charakter drgań niegasnących i trwałby w nieskończoność gdyby nie opory ruchu. W przypadku gdy istnieją opory ruchu (tarcie) drgania dielektryka wygasają a ich energia kinetyczna zamienia się w ciepło. Ilość wydzielonego ciepła jest częścią energii o jaką zmalała energia kondensatora.
Ruch cieczy dielektrycznej jest procesem bardziej złożonym niż ruch płytki, jednak istota problemu pozostaje taka sama. W przypadku cieczy mamy do czynienia z tarciem wewnętrznym (lepkością), które jest przyczyną zamiany energii kinetycznej ruchu cieczy w ciepło.

Zagadnienie 18

Okładki naładowanego kondensatora płaskiego oddziałują ze sobą z siłą F. Jak zmieni się ta siła jeśli między okładki zostanie wprowadzona płytka dielektryka. Czy wartość tej siły będzie zależeć od grubości i położenia płytki?

Odpowiedź

Oznaczmy odległość między okładkami jako x. Siłę działającą na każdą z okładek możemy wyznaczyć obliczając pochodną energii kondensatora po odległości x

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{2C}\right) = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{dC}{dX}$$

Pojemność kondensatora bez dielektryka wynosi

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{x}$$

czyli

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{\varepsilon_0 S}{x^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 S}C^2$$

a zatem siła F wynosi

$$F = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

W przypadku kiedy między okładkami znajduje się dielektryk pojemność kondensatora wynosi

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{\varepsilon x - (\varepsilon - 1)d}$$

Pochodna powyższego wyrażenia wynosi

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{\varepsilon^2 \varepsilon_0 S}{\left[\varepsilon x - (\varepsilon - 1)d\right]^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 S} C^2$$

Siła oddziaływania będzie więc w oczywisty sposób równa sile w przypadku braku dielektryka i nie będzie zależała ani od grubości płytki d ani od położenia płytki.