PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Mechanika – układy wielu ciał

Zadania z rozwiązaniami

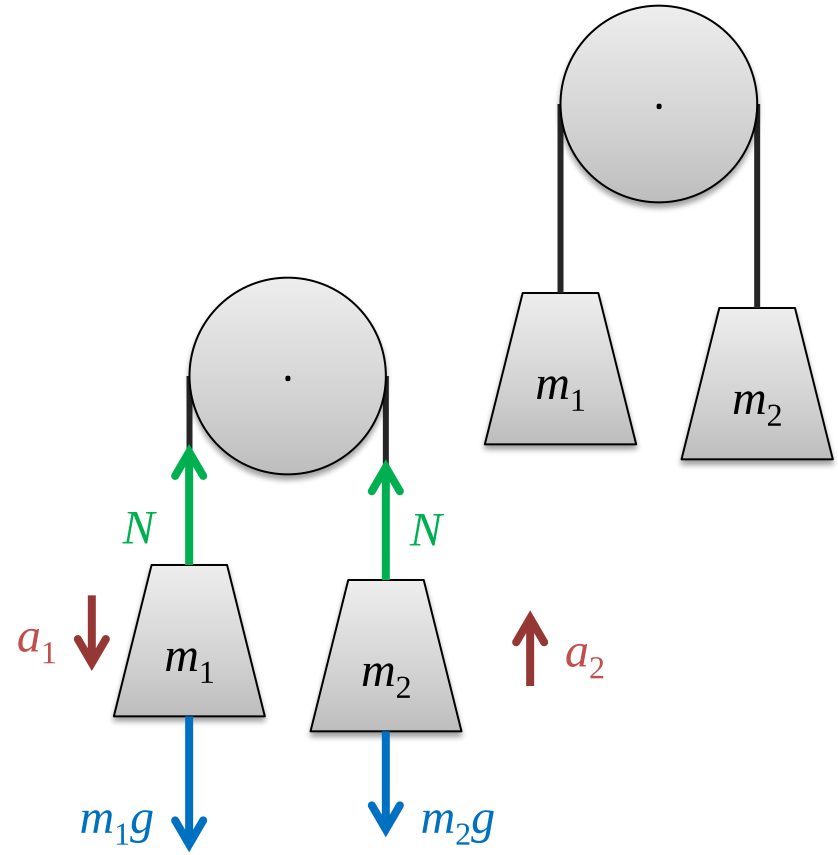
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

Oblicz przyspieszenie układu złożonego z dwóch odważników o masach m_1 i m_2 połączonych nieważką, nierozciągliwą nicią (rys. obok). Tarcie i bezwładność bloczka zaniedbać. Ponadto oblicz siłę naprężenia nici.



Rozwiązanie

Wykreślmy na rysunku obok wszystkie siły działające w układzie na rozważane odważniki. Są ta ich ciężary oraz siła naciągu nici (*N*), która jest taka sama po obu jej końcach (3. zasada dynamiki Newtona).

Sposób postępowania przy rozwiązywaniu tego typu zadań jest podobny. Dla każdego rozważanego ciała zapiszmy równanie ruchu postaci:

$$m_i a_i = \sum_j F_{ij}$$

W naszym przypadku nić jest nierozciągliwa, stąd przyspieszenia wszystkich ciał będą takie same.

Przyjmujemy następującą konwencję: siły posiadające zwrot zgodny z przyspieszeniem ciała mają znak dodatni, a siły o zwrocie przeciwnym – ujemny. Załóżmy, że $m_1 > m_2$, zatem zwrot przyspieszenia ciał będzie taki, jak zaznaczono na rysunku powyżej.

Wówczas równania ruchu możemy zapisać następująco:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - N \\ m_2 a = -m_2 g + N \end{cases}$$

Pozostaje teraz rozwiązać układ równań i wyznaczyć przyspieszenie *a* oraz siłę naprężenia *N*. Najprościej można to zrobić, dodając oba równania stronami:

$$+\begin{cases} m_1 a = m_1 g - N \\ m_2 a = -m_2 g + N \end{cases}$$

$$(m_1 + m_2)\cdot a = m_1 g - N - m_2 g + N$$

Po kilku prostych przekształceniach wyznaczamy przyspieszenie układu:

$$(m_1 + m_2)\cdot a = (m_1 - m_2) g$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\cdot g$$

Podstawiając wyznaczone przyspieszenie *a* do dowolnego równania rozwiązywanego układu (np. do drugiego), wyznaczymy wartość siły naprężenia:

$$m_2 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\cdot g = -m_2 g + N$$

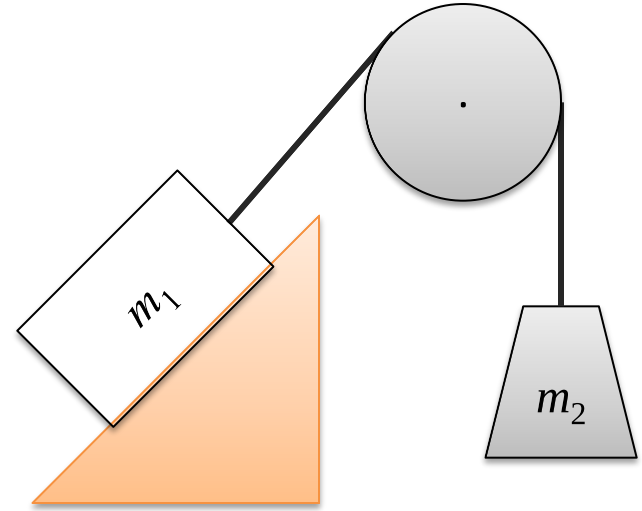
$$N = m_2 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\cdot g + m_2 g$$

$$N = \frac{m_1 m_2 - m_2^2 + m_1 m_2 + m_2^2}{m_1 + m_2}\cdot g$$

$$N = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}\cdot g$$

Zadanie 2

Oblicz przyspieszenie układu złożonego z dwóch skrzyń o masach m_1 i m_2 połączonych nieważką, nierozciągliwą nicią (rys. obok). Skrzynia o masie m_1 znajduje się na gładkiej równi pochyłej o kącie nachylenia α. Tarcie w układzie i bezwładność bloczka zaniedbać.

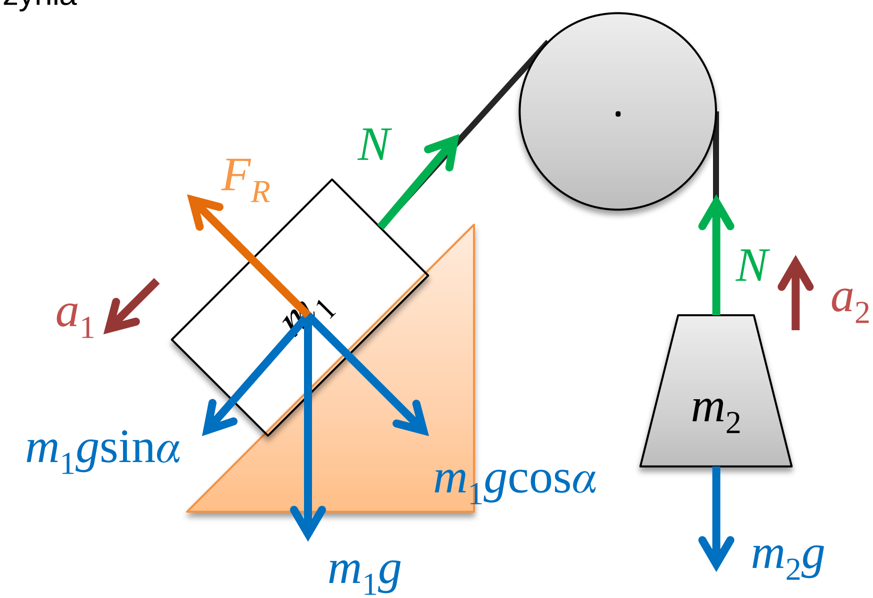


Rozwiązanie

Wykreślmy na rysunku obok wszystkie siły działające w układzie na rozważane skrzynie. Są ta ich ciężary oraz siła naciągu nici (*N*), która jest taka sama po obu jej. Siłę ciężkości działającą na skrzynię m_1 rozkładamy na wektory równoległy i prostopadły do powierzchni równi. Ponadto załóżmy, że masa m_1 jest na tyle duża, że skrzynia na równi będzie się zsuwać w dół.

Równania ruchu możemy zatem zapisać następująco:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g \sin\alpha - N \\ m_2 a = -m_2 g + N \end{cases}$$



Sumując oba równania stronami, znajdujemy przyspieszenie *a*:

$$(m_1 + m_2)\cdot a = m_1 g \sin\alpha - N - m_2 g + N$$

$$a = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2}\cdot g$$

Zadanie 3

Oblicz przyspieszenie układu z zadania 2 w sytuacji, w której ruch po równi odbywa się w dół z tarciem. Współczynnik tarcia wynosi μ.

Rozwiązanie

W układzie działają te same siły, co poprzednio. Ponadto pojawia się siła tarcia *T*, związana z naciskiem skrzyni m_1 na równię, o wartości:

$$T = \mu m_1 g \cos\alpha$$

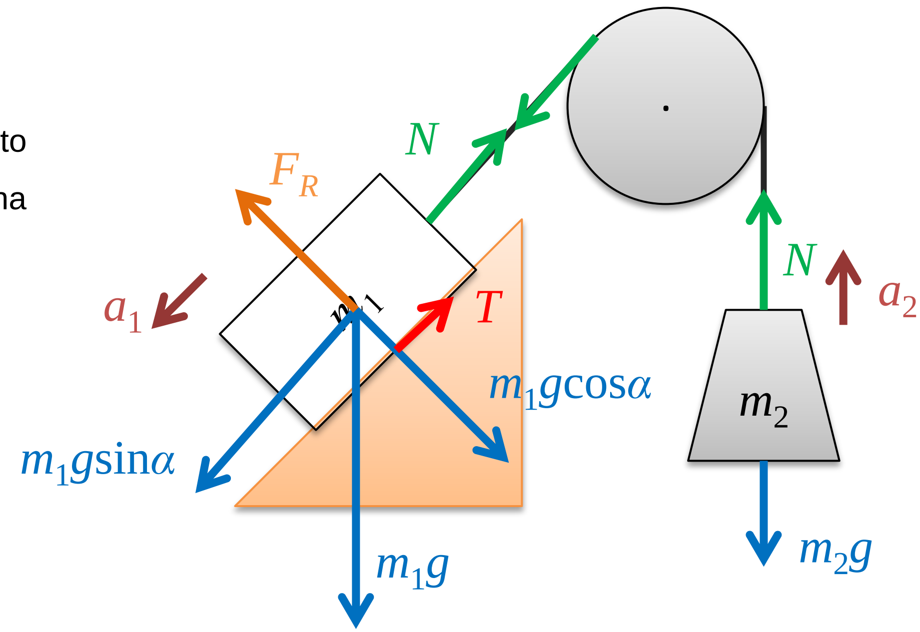
Siłę tę należy uwzględnić w równaniach ruchu:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g \sin\alpha - m_1 g \cos\alpha - N \\ m_2 a = -m_2 g + N \end{cases}$$

Następnie znajdujemy przyspieszenie *a*:

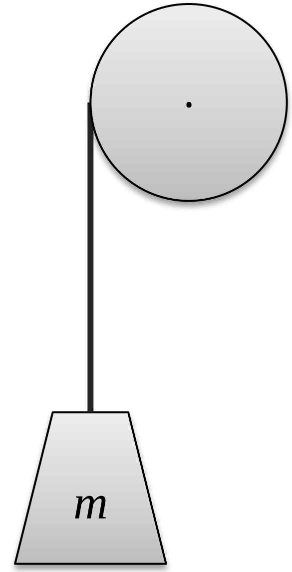
$$(m_1 + m_2)\cdot a = m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha - N - m_2 g + N$$

$$a = \frac{m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2}\cdot g$$



Zadanie 4

Ciężar o masie *m* zawieszony jest na nieważkiej, nierozciągliwej nici na bloczku o masie *M* i promieniu *R*. Oblicz przyspieszenie, z jakim poruszać się będzie ciężar.



Rozwiązanie

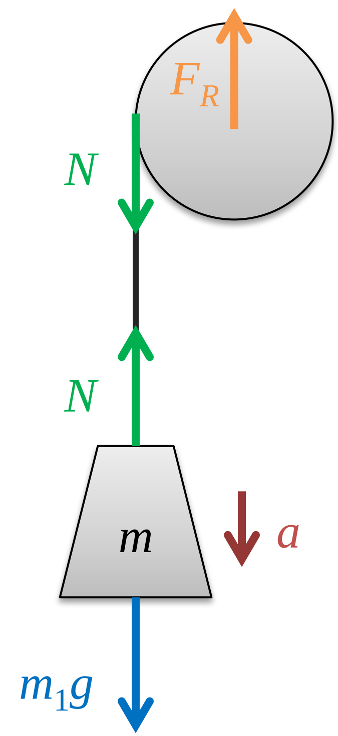
W zadaniu tym pod uwagę bierzemy nie tylko ruch ciężaru *m*, ale także bloczek *M*, który jest bryłą sztywną (walcem). Rozkład sił pokazano na rysunku obok. Równania ruchu wyglądają więc następująco:

$$\begin{cases} ma = mg - N \\ I\varepsilon = M_N \end{cases}$$

gdzie: *I* – moment bezwładności walca,

ε – przyspieszenie kątowa walca,

M_N – moment siły *N* względem osi obrotu walca.



Przekształćmy drugie równanie układu, uwzględniając zależności między wielkościami kątowymi a liniowymi: $I = \frac{1}{2}MR^2, \varepsilon = a/R, M_N = N \cdot R$

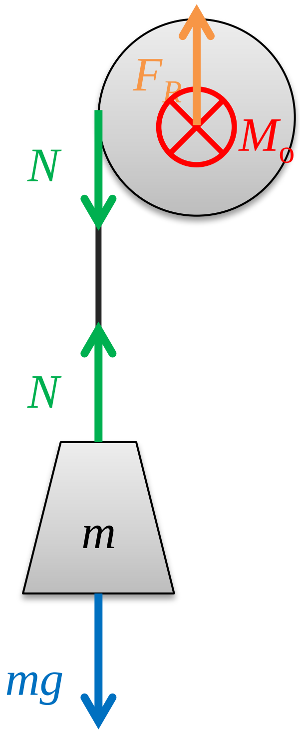
$$\begin{cases} ma = mg - N \\ \frac{1}{2}MR^2 \cdot \dfrac{a}{R} = N \cdot R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma = mg - N \\ \frac{1}{2}Ma = N \end{cases}$$

Następnie znajdujemy przyspieszenie *a*:

$$\left(m + \tfrac{1}{2}M\right) \cdot a = mg \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m}{m + \frac{1}{2}M} \cdot g$$

Zadanie 5

W układzie z zadania 4 uwzględnić dodatkowo moment siły oporu ruchu bloczka. Przyjąć, że jest on stały i wynosi M_o.



Rozwiązanie

W zadaniu tym pojawia się dodatkowy moment (hamujący) siły oporu działający na bloczek. Równania ruchu wyglądają więc następująco:

$$\begin{cases} ma = mg - N \\ I\varepsilon = M_N - M_o \end{cases}$$

Przekształcając drugie równanie, a następnie dodając je stronami, otrzymujemy:

$$\begin{cases} ma = mg - N \\ \frac{1}{2}MR^2 \cdot \dfrac{a}{R} = N \cdot R - M_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma = mg - N \\ \frac{1}{2}Ma = N - \dfrac{M_o}{R} \end{cases}$$

Stąd obliczmy przyspieszenie *a*:

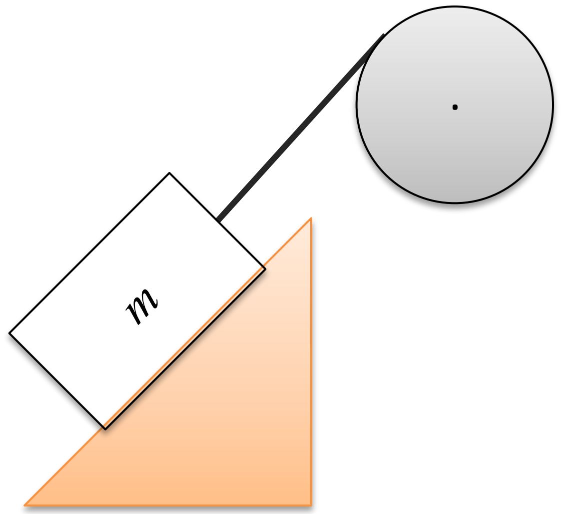
$$\left(m + \tfrac{1}{2}M\right) \cdot a = mg - \frac{M_o}{R}$$

$$a = \frac{mg - M_o / R}{m + \frac{1}{2}M}$$

Zadanie 6

Oblicz przyspieszenie układu pokazanego na rysunku obok.

Uwzględnij siłę tarcia między skrzynią *m* a równią, bezwładność oraz opory ruchu bloczka.

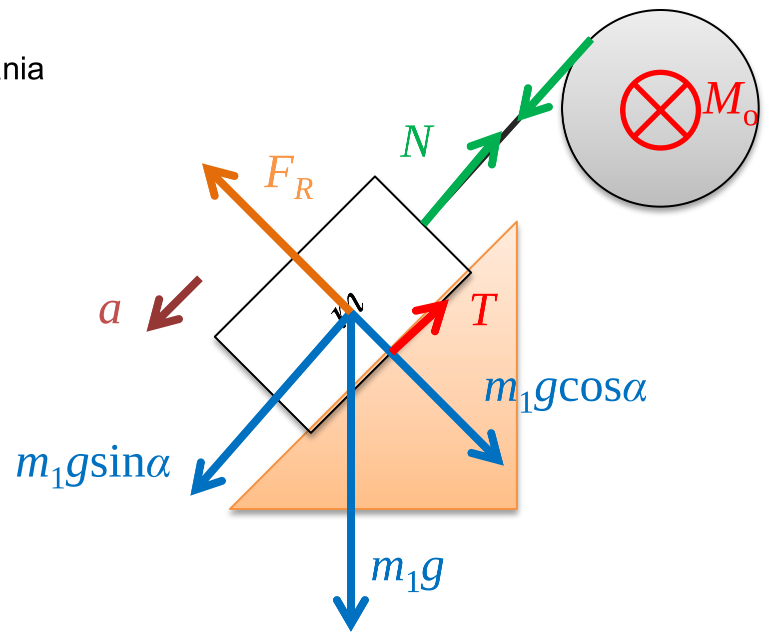


Rozwiązanie

Przedstawiony problem jest kombinacją problemów z zadania 3 i 5.

Równania ruchu możemy zatem zapisać następująco:

$$\begin{cases} ma = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cdot mg - N \\ I\varepsilon = M_N - M_o \end{cases}$$



Przekształcając równanie drugie, a następnie sumując oba równania stronami, znajdujemy przyspieszenie *a*:

$$\left(m + \tfrac{1}{2}M\right)\cdot a = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cdot mg - \frac{M_o}{R}$$

$$a = \frac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cdot mg - M_o / R}{m + \frac{1}{2}M}$$

Zadanie 7

Oblicz przyspieszenie układu jak w zadaniu 2. Uwzględnij tarcie w układzie i bezwładność bloczka. Zakładamy, że $m_1 >> m_2$.

Rozwiązanie

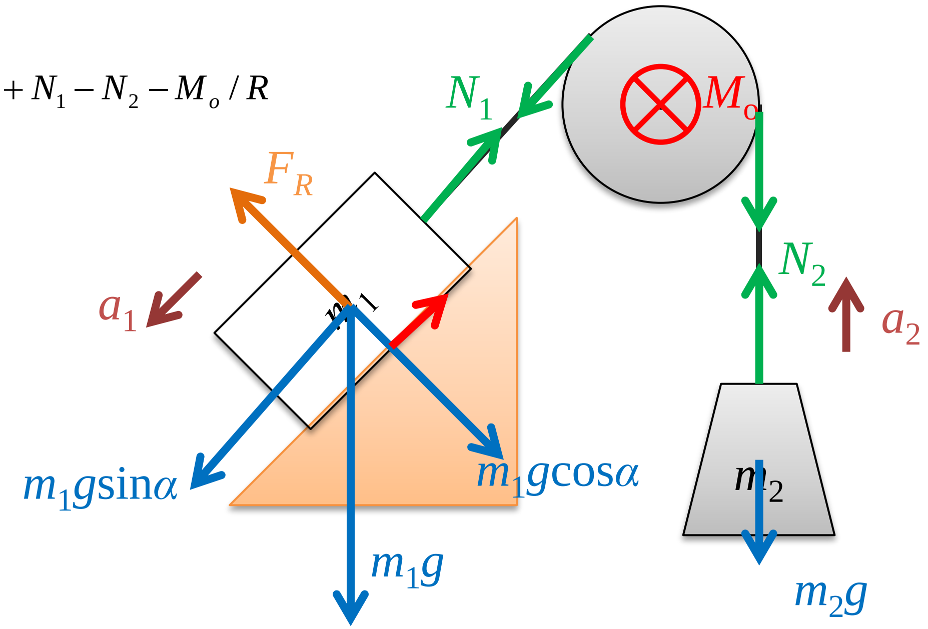
Tym razem mamy już do czynienia z układem trzech ciał. Przez analogię do poprzednich zadań, napiszemy układ 3 równań ruchu. Zauważmy, że siły naprężenia nici działające na oba klocki są tym razem różne.

$$\begin{cases} m_1 a = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cdot m_1 g - N_1 \\ m_2 a = -m_2 g + N_2 \\ I\varepsilon = M_{N_1} - M_{N_2} - M_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 a = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cdot m_1 g - N_1 \\ m_2 a = -m_2 g + N_2 \\ \frac{1}{2} Ma = N_1 - N_2 - M_o / R \end{cases}$$

Po zsumowaniu równań stronami otrzymamy:

$$\left(m_1 + m_2 + \tfrac{1}{2}M\right)\cdot a = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cdot m_1 g - N_1 - m_2 g + N_2 + N_1 - N_2 - M_o / R$$

$$a = \frac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cdot m_1 g - m_2 g - M_o / R}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}$$



Zadanie 8

Dla jakich wartości parametrów układu, układ z zadania 7 pozostanie w spoczynku? Pomiń opory ruchu bloczka.

Rozwiązanie

Przypomnijmy, że siła tarcia statycznego działa w zakresie od zera do wartości maksymalnej o zwrocie przeciwnym do zwrotu, w którym miałby odbywać się ruch. Oznacza to, że przy próbie zsuwania się skrzyni z równi, równanie graniczne przyjmie postać:

$$\frac{(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\cdot m_1 g - m_2 g}{m_1+m_2+\frac{1}{2}M}=a=0 \quad\Rightarrow\quad (\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\cdot m_1 = m_2$$

Z kolei przy próbie wciągania skrzyni w górę równi, równanie graniczne przyjmie postać z przeciwnym znakiem przy sile tarcia, ponieważ tarcie będzie działać w dół równi:

$$\frac{(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\cdot m_1 g - m_2 g}{m_1+m_2+\frac{1}{2}M}=a=0 \quad\Rightarrow\quad (\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\cdot m_1 = m_2$$

Możemy zatem wyznaczyć przedział wartości masy m_2, dla którego układ pozostanie w spoczynku:

$$(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\cdot m_1 \le m_2 \le (\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\cdot m_1$$

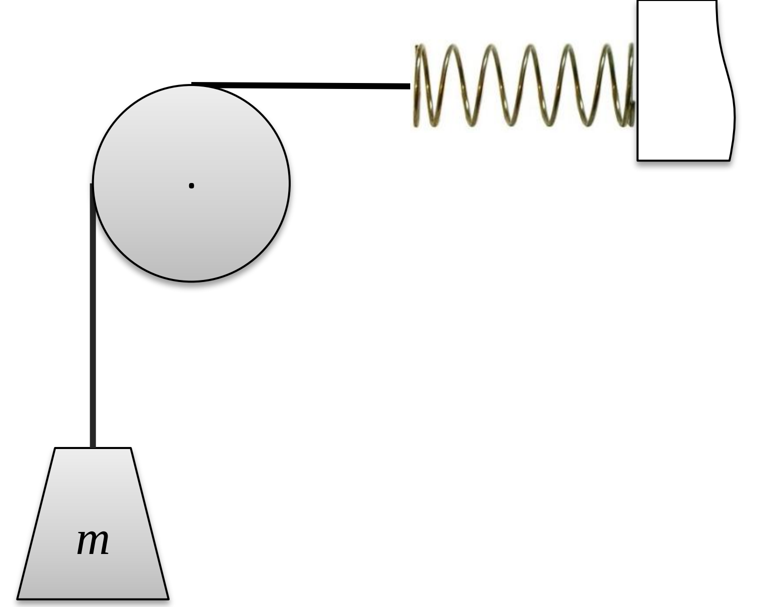
Zadanie 9

Ciężar o masie *m* przewieszony jest na nieważkiej, nierozciągliwej nici przez bloczek o masie *M* i promieniu *R* i połączony ze sprężyną o współczynniku sprężystości *k*. Oblicz:

1) wychylenie sprężyny w stanie równowagi układu (x_0);

2) częstość kołową drgań układu.

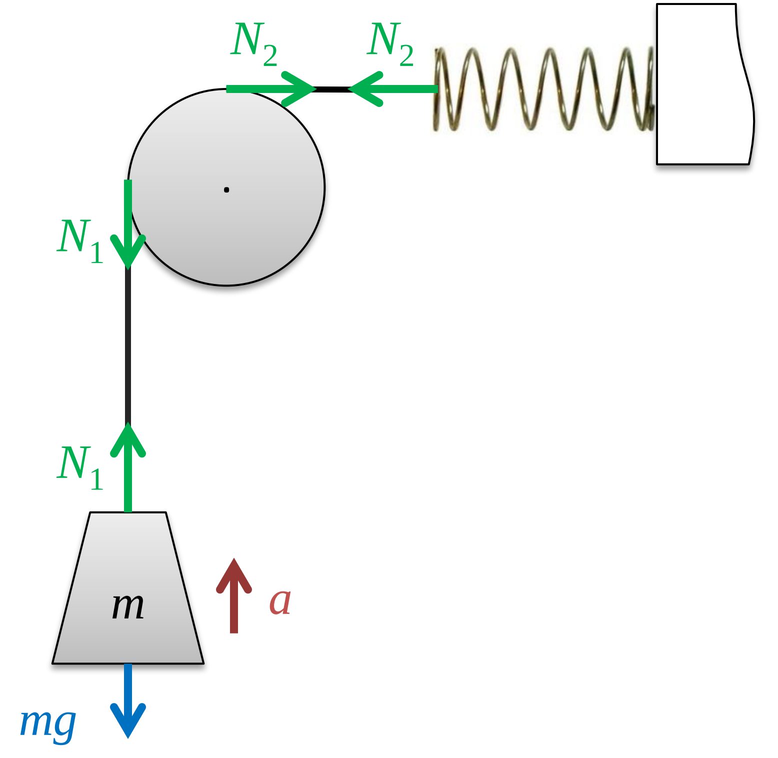
Zakładamy, że drgania odbywają się na tyle wolno, że nić pozostaje zawsze całkowicie naprężona, a masę sprężyny zaniedbujemy.



Rozwiązanie

Początek rozwiązania przypomina rozwiązania zadania 4. Dodatkowo jednak pojawia się siła sprężystości N_2.= $-k(x-x_0)$, gdzie x jest wychyleniem całego układu z położenia równowagi. Równania ruchu wyglądają więc następująco:

$$\begin{cases} ma = N_1 - mg \\ I\varepsilon = M_{N_2} - M_{N_1} \end{cases}$$



Przekształcamy układ podobnie jak w zadaniu 4:

$$\begin{cases} ma = N_1 - mg \\ \frac{1}{2}MR^2 \cdot \dfrac{a}{R} = N_2 \cdot R - N_1 \cdot R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma = N_1 - mg \\ \frac{1}{2}Ma = N_2 - N_1 \end{cases}$$

Dodajemy teraz równania stronami oraz podstawiamy wyrażenie na N_2:

$$\left(m+\tfrac{1}{2}M\right)\cdot a = -mg - k\left(x - x_0\right)$$

Zauważmy, że w położeniu równowagi układu, $a = 0$ oraz $x = 0$:

$$\left(m+\tfrac{1}{2}M\right)\cdot 0 = -mg - k\left(0 - x_0\right)$$

$$mg = kx_0 \;\Rightarrow\; x_0 = \frac{mg}{k}$$

Otrzymaliśmy zatem wychylenie sprężyny w stanie równowagi całego układu. Podstawiając ten wynik do wyrażenia na przyspieszenie, otrzymamy:

$$\left(m+\tfrac{1}{2}M\right)\cdot a = -kx$$

$$a = -\frac{k}{m+\tfrac{1}{2}M}\,x$$

Wiemy, że drgania harmoniczne są opisane wyrażeniem $a = -\omega^2 x$.

Zatem z powyższego wyrażenia możemy natychmiast wyznaczyć częstość kołową drgań:

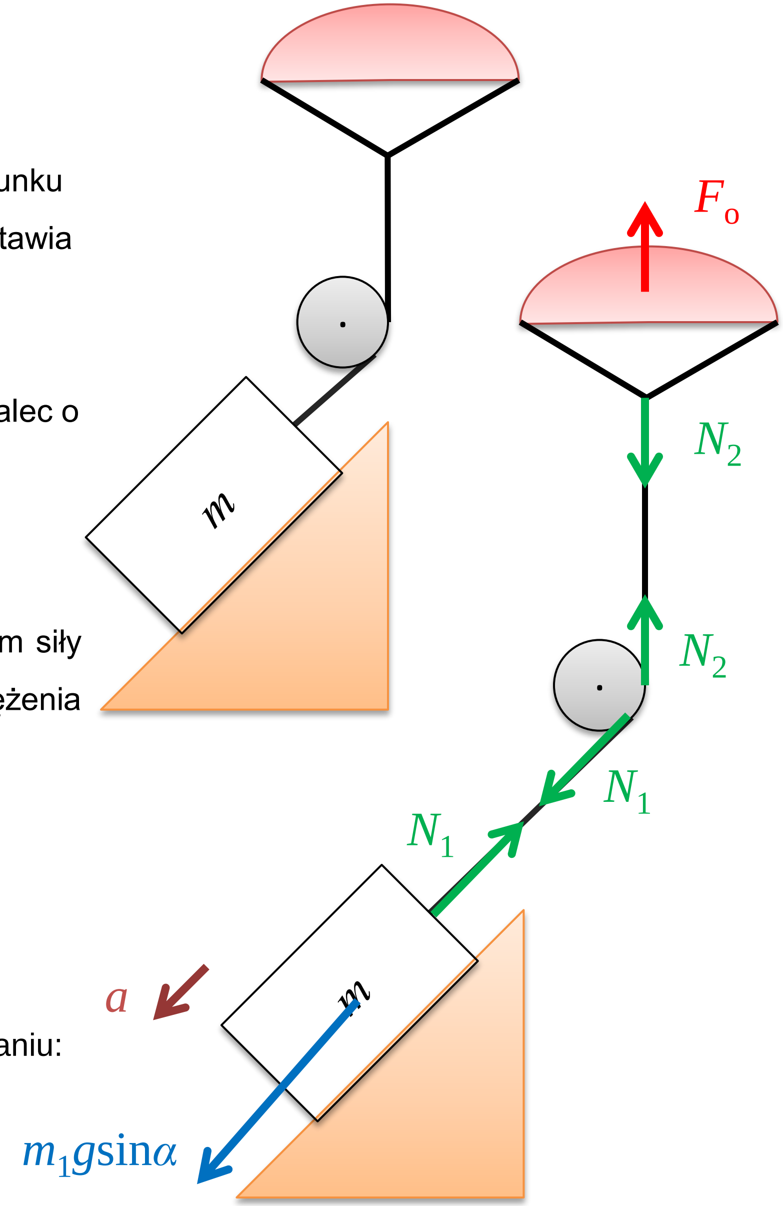
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+\tfrac{1}{2}M}}$$

Zadanie 10

Wyznacz wyrażenie na przyspieszenie układu pokazanego na rysunku obok oraz oblicz prędkość maksymalną tego ruchu. Spadochron stawia opór aerodynamiczny zgodnie z wyrażeniem:

$F_o = -bu$,   gdzie u – prędkość, b – znana stała.

Masę spadochronu zaniedbaj. Bloczek należy potraktować jako walec o masie M i promieniu R. Moment oporu ruchu bloczka wynosi M_o.



Rozwiązanie

Przedstawiony problem jest podobny do zadania 6 (z pominięciem siły tarcia). Dodatkową siłę działającą na bloczek stanowi siła naprężenia nici łączącej go ze spadochronem, $N_2 = -F_o = bu$.

Równania ruchu możemy zatem zapisać następująco:

$$\begin{cases} ma = mg\sin\alpha - N_1 \\ I\varepsilon = M_{N_1} - M_{N_2} - M_o \end{cases}$$

Przekształcamy równanie drugie, podobnie jak w poprzednim zadaniu:

$$\begin{cases} ma = mg\sin\alpha - N_1 \\ \tfrac{1}{2}MR^2 \cdot \dfrac{a}{R} = N_1 \cdot R - N_2 \cdot R - M_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma = mg\sin\alpha - N_1 \\ \tfrac{1}{2}Ma = N_1 - N_2 - M_o / R \end{cases}$$

Dodajemy teraz równania stronami oraz podstawiamy wyrażenie na N_2:

$$\left(m+\tfrac{1}{2}M\right)\cdot a = mg\sin\alpha - b\upsilon - M_0/R$$

Powyższe równanie można rozwiązać, zauważając, że jest to równanie różniczkowe liniowe niejednorodne, gdyż:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt}$$

Zatem możemy je zapisać w postaci:

$$b\frac{da}{dt} + \left(m+\tfrac{1}{2}M\right)\cdot a = mg\sin\alpha - M_0/R$$

My jednak skupimy się na odpowiedzi na pytanie postawione w treści zadania. Siły oporu aerodynamicznego rosną wraz z prędkością układu, dlatego dla pewnej prędkości maksymalnej υ_{max} zrównoważą one pozostałe siły w układzie, tak że $a = 0$:

$$\left(m+\tfrac{1}{2}M\right)\cdot 0 = mg\sin\alpha - b\upsilon_{\max} - M_0/R$$

$$\upsilon_{\max} = \frac{mg\sin\alpha - M_0/R}{b}$$

Widzimy, że o ile masa bloczka występuje w równaniu ruchu układu, o tyle nie ma wpływu na prędkość maksymalną układu.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1

Oblicz przyspieszenie układu jak na rysunku poniżej. Ruch odbywa się bez tarcia; zaniedbaj także bezwładność bloczka.

Odp.: $$a = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta}{m_1 + m_2} \cdot g$$

Zadanie 2

Oblicz przyspieszenie układu jak na rysunku poniżej. Ruch odbywa się bez tarcia; uwzględnij jednak bezwładność bloczka o masie *M*.

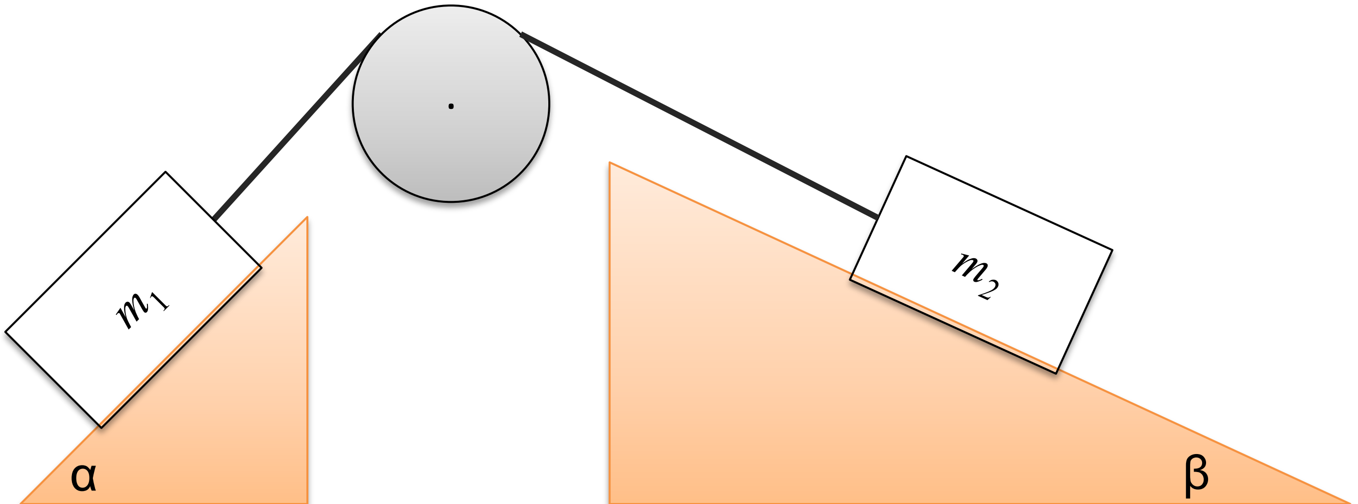
Odp.: $$a = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} \cdot g$$

Zadanie 3

Oblicz przyspieszenie układu jak na rysunku poniżej. Uwzględnij tarcie, bezwładność bloczka oraz jego opór.

Rozważ dwa przypadki: a) układ porusza się w lewo; b) układ porusza się w prawo.

Odp.: $$a_a = \frac{m_1 g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2 g(\sin\beta + \mu\cos\beta) - M_o / R}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} \qquad a_b = \frac{m_2 g(\sin\beta - \mu\cos\beta) - m_1 g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) - M_o / R}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}$$



Zadanie 4

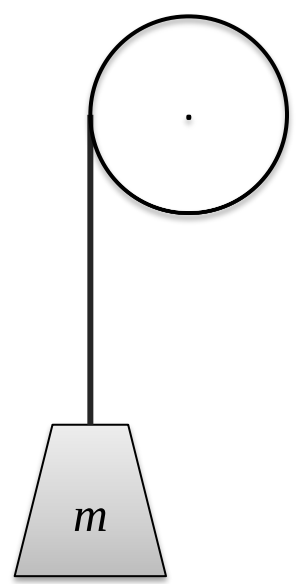
Oblicz przyspieszenie układu jak na rysunku poniżej. Funkcję bloczka pełni cylinder (pusty w środku) o masie *M* i promieniu *R*. Opory ruchu obrotowego zaniedbaj.

Odp.: $a = \frac{m}{m+M} \cdot g$

Zadanie 5

Oblicz przyspieszenie układu jak na rysunku poniżej. Uwzględnij opory ruchu obrotowego o momencie siły M_o.

Odp.: $a = \frac{mg - M_o / R}{m+M}$



Zadanie 6

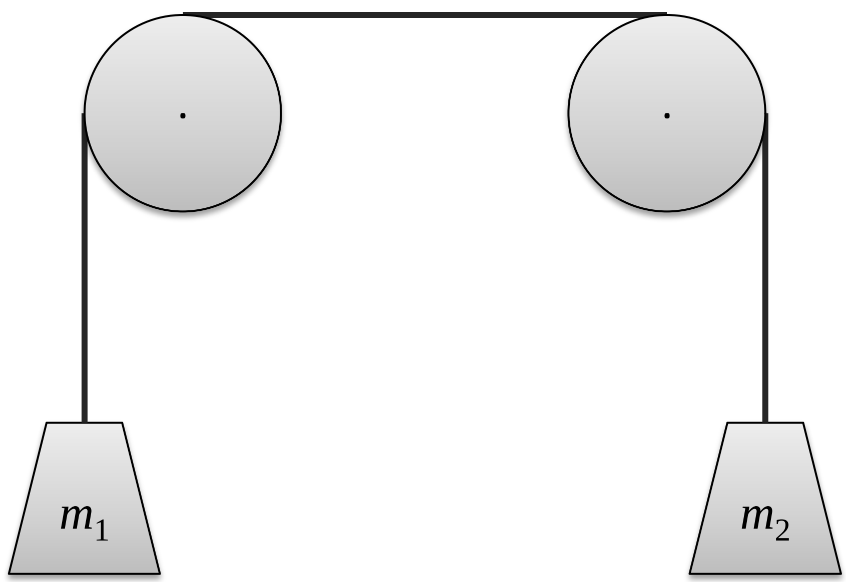
Oblicz przyspieszenie układu jak na rysunku poniżej. Opory ruchu obrotowego zaniedbaj. Bloczki w kształcie walca mają masy odpowiednio M_1 i M_2.

Odp.: $$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}\left(M_1 + M_2\right)} \cdot g$$

Zadanie 7

Uwzględniając opory ruchu walców (maksymalne momenty tarcia M_{o1} i M_{o2}), wyznacz maksymalną różnicę mas ciężarów m_1 i m_2, dla której układ pozostanie w spoczynku.

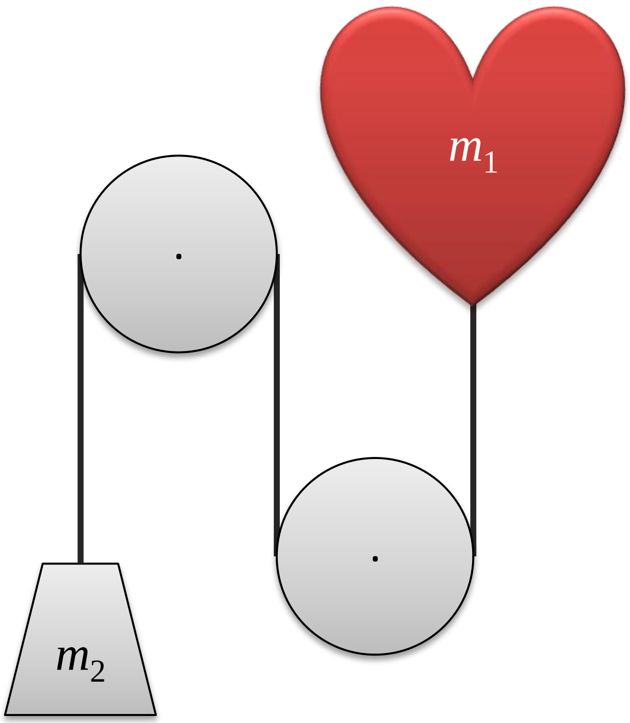
Odp.: $$\left|m_1 - m_2\right| \le \frac{M_{o1} + M_{o2}}{gR}$$



Zadanie 8

Oblicz siłę wyporu F_w balonika wypełnionego helem o masie całkowitej m_1, jeśli układ na rysunku poniżej porusza się ruchem jednostajnym. Moment sił oporu bloczków wynoszą odpowiednio M_{o1} i M_{o2}.

Odp.: $F_w = (m_1 + m_2) \cdot g + (M_{o1} + M_{o2}) / R$



Zadanie 9

Jak zmieni się częstość kołowa drgań ω układu z zadania 9 (z rozwiązaniem), jeśli uwzględnimy moment siły oporu ruchu bloczka proporcjonalny do prędkości liniowej układu $M_o(\upsilon) = -b\upsilon$? Zakładamy słabe tłumienie drgań.

Wskazówka: przykład rozwiązania równania różniczkowego opisującego układ drgań tłumionych znaleźć można w rozwiązaniu zadania o obwodzie RLC w prezentacji „Prąd elektryczny stały i zmienny".

Odp.: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{1}{2}M}}, \quad \beta = \frac{b}{2R\left(m + \frac{1}{2}M\right)}$$

Zadanie 10

Oblicz prędkość układu z zadania 10 (z rozwiązaniem), tj. rozwiąż przedstawione na slajdzie równanie różniczkowe. Zakładamy, ż w chwili początkowej $t = 0$ układ spoczywał. Czy granica obliczonego wyrażenia dla $t \to \infty$ jest zgodna z wcześniejszym rozwiązaniem?

Odp.: $$\upsilon(t) = \frac{mg\sin\alpha - M_o / R}{b} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{b}{m + \frac{1}{2}M}t\right)\right]$$

$$\lim_{t\to\infty} \upsilon(t) = \frac{mg\sin\alpha - M_o / R}{b} = \upsilon_{\max}$$