PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Drgania harmoniczne

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Drgania harmoniczne

O oscylatorze harmonicznym możemy mówić wtedy, kiedy siła hamująca działa proporcjonalnie do wychylenia z położenia równowagi. Równanie ruchu ma wtedy postać:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Pierwszy wyraz to zapisane różniczkowo przyśpieszenie ciała a. W drugim wyrazie występuje wychylenie x oraz częstość drgań własnych ω_0. Rozwiązanie takiego równania ma postać:

$$x = A\sin(\omega_0 t + \phi)$$

gdzie f – faza początkowa. Są to drgania okresowe, a okres drgań wynosi

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

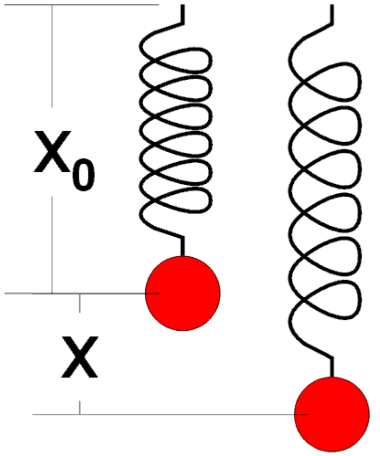
Przykładem drgań harmonicznych jest ruch odważnika o masie m, zaczepionego do nieważkiej sprężyny o współczynniku sprężystości k. Równanie ruchu ma postać:

$$ma = -kx \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

gdzie x- wydłużenie sprężyny

Porównując to równanie z równaniem oscylatora harmonicznego otrzymujemy częstość drgań własnych:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



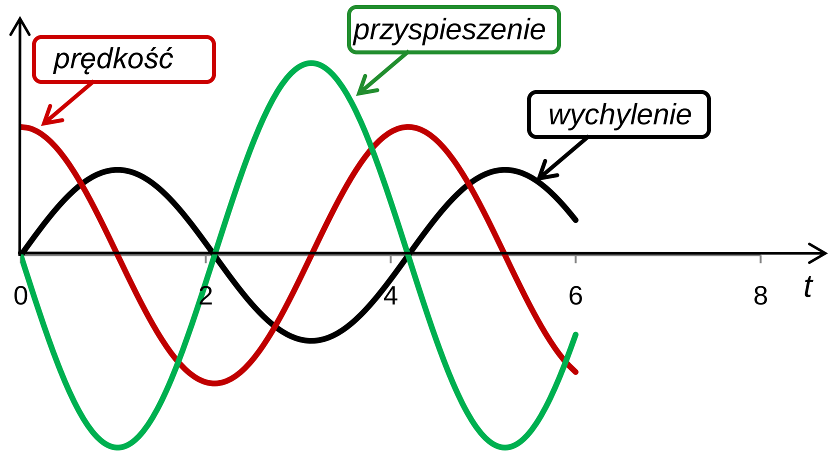
Prędkość i przyspieszenie w ruchu harmonicznym

Z równania ruchu harmonicznego $x = A\,sin(\omega t + \varphi)$ można wyznaczyć zależność prędkości od czasu

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\, cos(\omega t + \varphi)$$

…a także zależność przyspieszenia od czasu

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\, sin(\omega t + \varphi)$$



Zależność wychylenia, prędkości i przyspieszenia od czasu

Energia w ruchu harmonicznym

Energię potencjalną w ruchu harmonicznym wyznaczamy, obliczając pracę, jaką trzeba wykonać, aby przesunąć ciało na odległość x z położenia równowagi. Przy przesuwaniu o odcinek dx wykonamy pracę:

$$dW = Fdx$$

Całkowita praca jest równa: $$W = \int_0^x Fdx = \int_0^x (-kx)dx = \frac{kx^2}{2}$$

Energia potencjalna w ruchu harmonicznym: $$\boxed{E_p = \frac{kx^2}{2}}$$

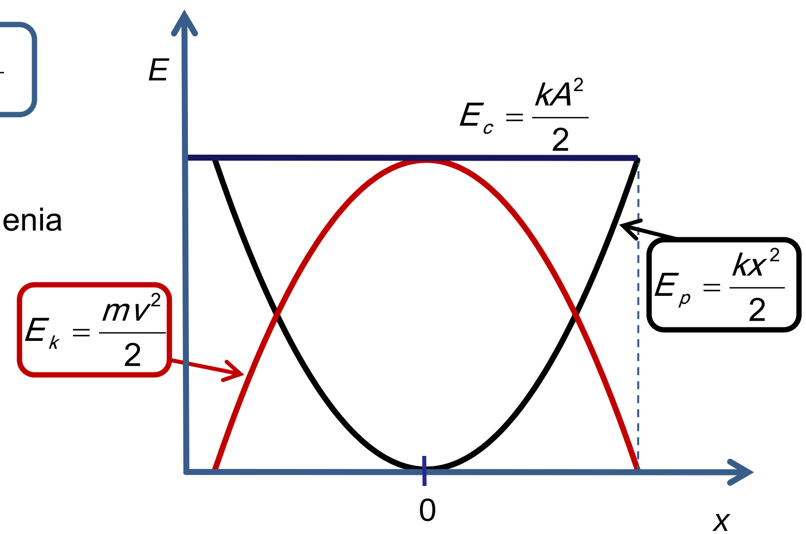
Energia kinetyczna w ruchu harmonicznym: $$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2 cos(\omega t + \varphi)}{2}$$

Energia całkowita w ruchu harmonicznym:

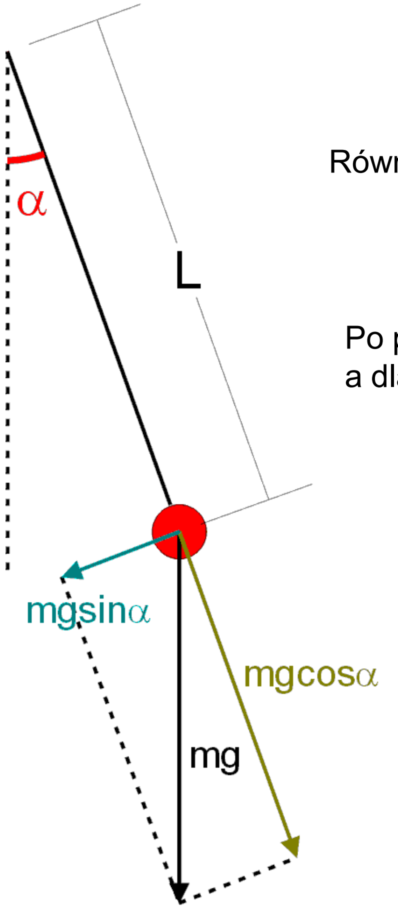
$$E_c = E_p + E_k = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{kA^2 sin^2(\omega t + \varphi)}{2} + \frac{m\omega^2 A^2 cos^2(\omega t + \varphi)}{2} = \frac{kA^2}{2}$$

Energia całkowita nie zależy od czasu – jest stała $$\boxed{E_c = \frac{kA^2}{2}}$$

Zależność energii kinetycznej i potencjalnej od wychylenia



Wahadło matematyczne i fizyczne



Równanie ruchu dla wahadła matematycznego ma postać:

$$ma = -mg\sin\alpha$$

Po przeliczeniu przyśpieszenia liniowego na kątowe, oraz zastosowaniu przybliżenia sin a = a dla małych kątów, otrzymujemy:

$$\varphi + \frac{g}{l}\alpha = 0$$

gdzie φ – przyśpieszenie kątowe, lub w zapisie różniczkowym:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego, którego okres i częstotliwość wynoszą

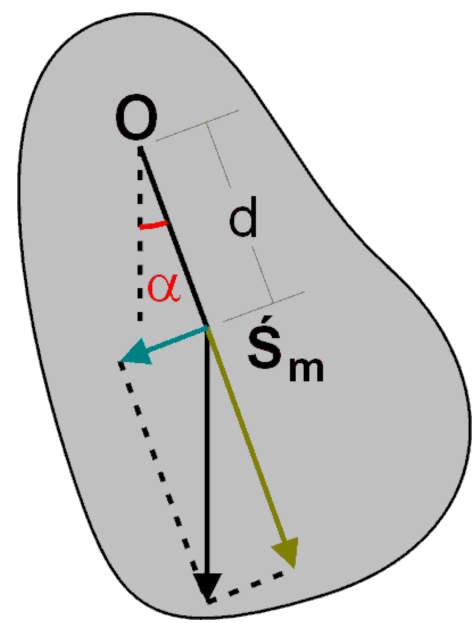
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Podobne obliczenia można przeprowadzić dla bryły sztywnej, zawieszonej na osi przechodzącej powyżej swojego środka masy. Otrzymujemy:

$$I\varphi + mgd\alpha = 0$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

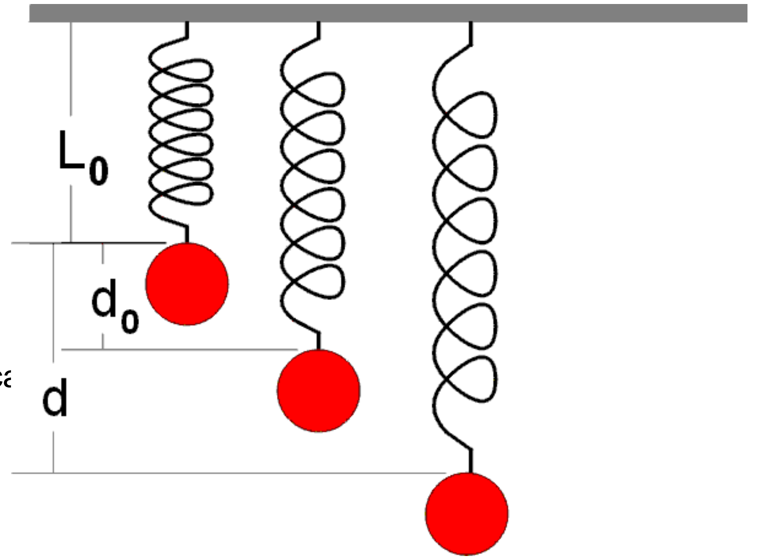
gdzie I – moment bezwładności bryły względem wybranej osi, m – masa bryły, g – przyśpieszenie ziemskie, d – odległość od wybranej osi do środka masy bryły.



Drgania harmoniczne

Zadanie 1.
Długość swobodna sprężyny zwisającej pionowo wynosi L_0 = 10 cm, a jej stała sprężystości k wynosi 100 N/m. Na sprężynie zawieszono kulkę o masie m = 1 kg a następnie puszczono swobodnie. Oblicz, jakie będzie najniższe i najwyższe położenie kulki. Podaj, gdzie znajduje się położenie równowagi takiego układu. Oblicz okres drgań.

Kiedy kulka zostaje zawieszona na sprężynie, ma energię potencjalną względem najniższego położenia. W najniższym położeniu energia ta zostaje zamieniona w energię sprężystości:



$$mgd = \frac{kd^2}{2}$$

Równanie to ma dwa rozwiązania ze względu na *d*, które odpowiadają skrajnym położeniom ciężarka.Jedno rozwiązanie to *d*=0 – ciężarek wraca do położenia początkowego. Drugie rozwiązanie to

$$d = \frac{2mg}{k}$$

Po obliczeniu otrzymujemy *d* = 0.2 m. Zatem najniższe położenie kulki to L_0+d = 30 cm.

Gdyby kulka wisiała swobodnie na sprężynie, siła sprężystości równoważyłaby siłę grawitacji. Pozwala to obliczyć wydłużenie równowagowe d_0 – położenie, wokół którego następują oscylacje.

$$mg = kd_0$$

Po obliczeniu otrzymujemy d_0 = 0.1 m.

Obliczamy okres:

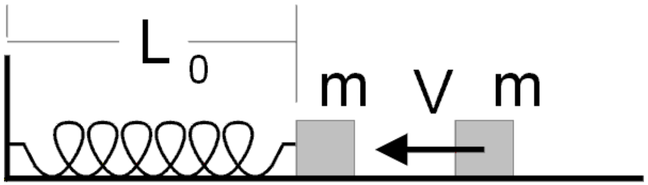
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Otrzymujemy wartość *T* = 0.63 s

Drgania harmoniczne

Zadanie 2

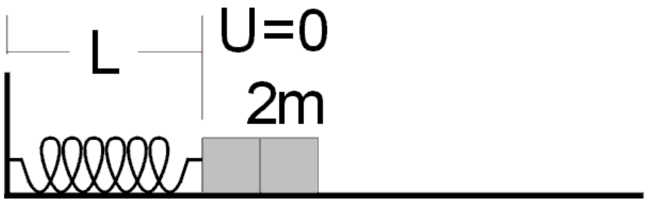
Klocek o masie m=1 kg leży na gładkim stole i jest przyczepiony do ściany poziomą sprężyną o stałej sprężystości k = 800 N/m i długości swobodnej L_0 = 20 cm. Klocek o identycznej masie i prędkości v = 4 m/s poruszający się w kierunku ściany zderza się z nim niesprężyście. Na jaką minimalną odległość L_{min} zostanie ściśnięta sprężyna, a na jaką L_{max} rozciągnięta? Jaki będzie okres drgań po zderzeniu?



Zderzenie jest niesprężyste i klocki łączą się ze sobą. Korzystamy z zasady zachowania pędu by obliczyć wspólną prędkość klocków po zderzeniu.

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u$$

Ponieważ w zadaniu $m_1 = m_2$, to u=v/2 = 2 m/s



Energia kinetyczna klocków po zderzeniu zmieni się całkowicie w energię sił sprężystych w skrajnych położeniach - jeśli sprężyna zostanie maksymalnie ściśnięta bądź rozciągnięta (wtedy u=0)

$$\frac{2mu^2}{2} = \frac{kd^2}{2}$$

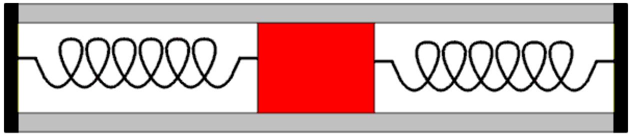
gdzie d – amplituda drgań.

Po przekształceniach otrzymujemy d_1 = 0.1 m i d_2 = -0.1 m.Sprężyna zostanie ściśnięta na odległość L_0+d_2 = 10 cm, a rozciągnięta na odległość L_0+d_1 = 30 cm.

Okres drgań obliczymy ze wzoru: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$ T wynosi 0.314 s

Drgania harmoniczne

Zadanie 3
Walec o masie *m* =1 kg umieszczono w połowie gładkiego, poziomego cylindra. Kiedy walec jest zaczepiony do jednego z zakończeń cylindra sprężyną, wykonuje drgania o częstotliwości 1 Hz. Kiedy przypięto go drugą sprężyną do drugiego końca cylindra, częstotliwość drgań wyniosła 2 Hz. Zakładając, że długości swobodne sprężyn są równe odległościom od podstaw walca do końców cylindra, oblicz ile wynoszą stałe sprężystości sprężyn?



Zaczynamy od sytuacji, kiedy zaczepiona jest tylko jedna sprężyna. Częstość drgań ω_1 wynosi wtedy:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \qquad k_1 = \frac{\omega_1^2}{m} = \frac{(2\pi f_1)^2}{m}$$

Obliczona wartość wynosi 39.5 N/m

Zapisujemy równanie ruchu dla dwu sprężyn:

$$ma = -k_1 x - k_2 x$$

Wydłużenie jednej ze sprężyn powoduje identyczne skrócenie drugiej.

$$ma = -(k_1 + k_2)x$$

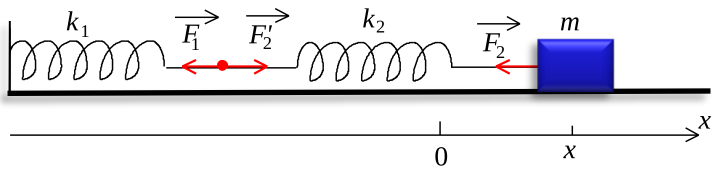
Zatem częstość drgań wynosi: $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$

Stąd: $$(2\pi f_2)^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} \qquad \frac{(2\pi f_2)^2 - \frac{k_1}{m}}{m} = k_2$$

Druga ze sprężyn ma stałą sprężystości 118.4 N/m

Drgania harmoniczne

Zadanie 4
Obliczyć okres drgań układu przedstawionego na rysunku.
Zaniedbać opór powietrza i tarcie.



Po wychyleniu klocka z położenia równowagi do położenia x pierwsza sprężyna wydłuży się o d_1 a druga o d_2, przy czym:

$$d_1 + d_2 = x$$

$$F_1 = -k_1 d_1$$

$$F_2 = -k_2 d_2$$

Ruch klocka będzie się odbywać pod wpływem siły $\vec{F}_2$. W miejscu połączenia sprężyn działają siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2'$.
Ich wartości są równe, zatem: $k_1 d_1 = k_2 d_2$

Z układu równań:

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = x \\ k_1 d_1 = k_2 d_2 \end{cases}$$

obliczamy: $d_2 = \dfrac{k_1 x}{k_1 + k_2}$, a następnie $F_2 = -k_2 d_2 = -\dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x$

Z porównania ze wzorem na siłę harmoniczną wynika, że $k^* = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$, zatem:

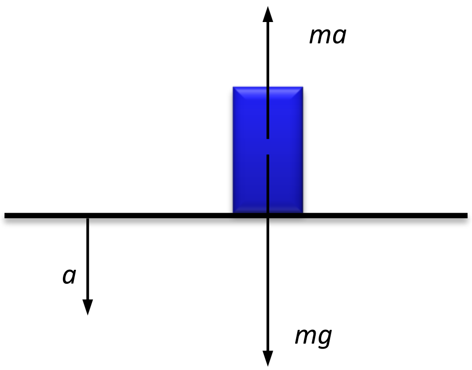
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k^*}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$$

Drgania harmoniczne

Zadanie 5

Płaska podstawka porusza się ruchem harmonicznym pionowym. Na tej podstawce leży odważnik. Jaka może być maksymalna amplituda tych drgań, aby odważnik nie odrywał się od podstawki? Okres drgań podstawki i odważnika wynosi T, a przyspieszenie ziemskie g.

Odważnik znajduje się w układzie nieinercjalnym (podstawka porusza się z przyspieszeniem różnym od zera), działa więc na niego siła bezwładności zawsze skierowana przeciwnie do zwrotu przyspieszenia podstawki. Odważnik może oderwać się od podstawki, jeśli przyspieszenie będzie skierowane w dół i osiągnie maksymalną wartość (podstawka będzie w najwyższym położeniu).



Zapisujemy równanie ruchu harmonicznego:

$$x = A\cos\omega t$$

stąd:
$$a = -A\omega^2 \cos\omega t$$

Wartość maksymalna przyspieszenia wynosi: $$a_{max} = A\omega^2$$

Odważnik nie oderwie się od podstawki, jeśli: $$ma_{max} \le mg$$

$$A\omega^2 \le g$$

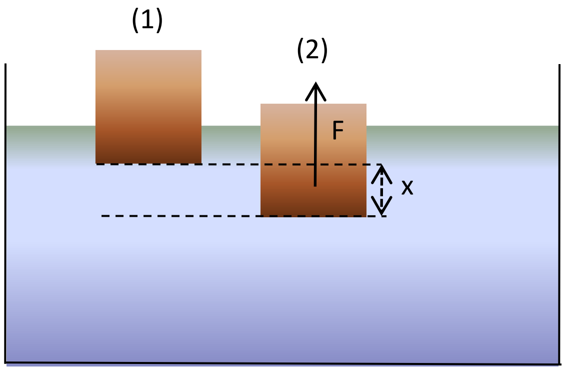
$$A \le \frac{g}{\omega^2}$$

ponieważ $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$A \le \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

Drgania harmoniczne

Zadanie 6
Drewniany sześcian o krawędzi *a* i gęstości ρ_2 pływa na powierzchni wody (gęstość ρ_1). Sześcian popchnięto w dół i zaczął wykonywać drgania. Wykazać, ze są to drgania harmoniczne i obliczyć okres drgań.



W położeniu równowagi (1) siły wyporu i ciężkości równoważą się.
W położeniu (2) działa niezrównoważona siła wyporu:

$$F = -xa^2\rho_2 g$$

Siła jest wprost proporcjonalna do wychylenia *x* i przeciwnie skierowana.
Jest to więc ruch harmoniczny o współczynniku:

$$k = a^2\rho_2 g$$

Teraz możemy obliczamy częstotliwość drgań własnych:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{\rho_2 g}{a\rho_1}$$

A następnie okres drgań:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_1 a}{\rho_2 g}}$$

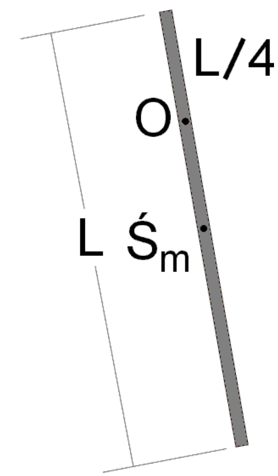
Wahadło fizyczne

Zadanie 5

Sztywny, cienki pręt o długości L = 1 m i masie m = 5 kg zawieszono na prostopadłej osi, przecinającej go w ¼ długości. Jaki jest okres drgań takiej bryły? Jak zmieni się okres po przeniesieniu osi na koniec pręta?

Okres wahadła fizycznego wyrażony jest wzorem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$



Mamy zatem do wyliczenia dwie niewiadome: moment bezwładności I i odległość od osi do środka masy d.

Moment bezwładności wyliczamy z twierdzenia Steinera:

$$I = I_0 + mx^2 = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{16} = \frac{7}{48}mL^2$$

gdzie x=¼ L oznacza równoległe przesunięcie osi względem osi związanej ze środkiem masy pręta, dla której moment bezwładności $I_0=mL^2/12$

Widzimy również, że szukane d = ¼ L, gdyż taka jest odległość między środkiem masy pręta a wybraną osią. Zatem szukany okres:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{7}{48}mL^2}{mg\frac{1}{4}L}} = 2\pi\sqrt{\frac{7\cdot 4L}{48g}}$$

Okres jest niezależny od masy pręta i wynosi 1.51s (g przyjęto jako 10 m/s^2).

Jeśli oś przeniesiemy na koniec pręta, otrzymamy:

$$I = \frac{mL^2}{3}$$

oraz d= ½ L

Okres wynosi w tym przypadku 1.62 s.

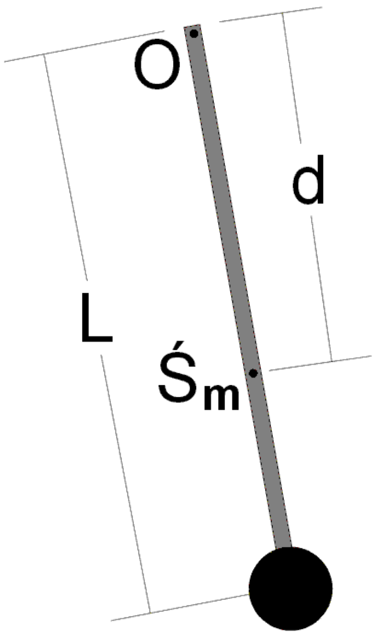
Wahadło fizyczne

Zadanie 6

Sztywny, cienki pręt o długości L = 1 m i masie m = 4 kg zawieszono na prostopadłej osi, przechodzącej przez koniec pręta. Na jego drugim końcu zawieszono ołowianą kulkę o masie M = 2 kg. Jaki jest okres drgań takiej bryły? Kulkę potraktuj jako masę punktową.

Podobnie jak poprzednio, korzystamy ze wzoru na okres wahadła fizycznego $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$

Obliczamy moment bezwładności bryły względem osi. Jest on sumą momentów bezwładności pręta i kulki.



$$I = I_P + I_K \qquad I_P = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{3} \qquad I_K = ML^2$$

Żeby obliczyć odległość d, musimy znać położenie środka masy bryły. Początek układu wygodnie jest przyjąć w osi.

$$R_{śm} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{\frac{L}{2}m + LM}{m+M}$$

Środek masy znajduje się w odległości 2/3 L od osi i taką przyjmujemy odległość d.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{mL^2}{3} + ML^2}{(m+M)g\frac{2}{3}L}}$$

Obliczony okres T wynosi 1.81 s.

Wahadło fizyczne

Zadanie 7
Jaki jest okres wahań jednorodnej kuli o masie m=0,5 kg i promieniu R=1m zawieszonej na małym haczyku wbitym w jej powierzchnię? Na jak długim sznurku trzeba by zawiesić małą kulkę o takiej samej masie m, aby wahała się z taką samą częstotliwością?

Moment bezwładności kuli względem punktu zawieszenia (z twierdzenia Steinera):

$$I = I_0 + mR^2$$

$$I = \frac{2}{5}mR^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mR^2$$

Ze wzoru na okres wahadła fizycznego:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{7mR^2}{5mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{7R}{5g}} = 2{,}35[s]$$

Okres wahadła matematycznego ma być równy okresowi wahadła fizycznego:

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{7R}{5g}} \Rightarrow l = \frac{7}{5}R = 1{,}4[m]$$

Ta długość jest nazywana ***długością zredukowaną wahadła fizycznego***.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Model zawieszenia samochodu jest płaską płytą o masie m=1000 kg, podpartą czterema identycznymi sprężynami. Jakie muszą być ich stałe sprężystości, aby częstotliwość drgań wynosiła 1 Hz (zakładamy, że płyta drga jedynie w płaszczyźnie pionowej)?

Odp.: 250 N/m

2. Na szczycie gładkiej równi pochyłej, nachylonej pod kątem 30° do poziomu przymocowano sprężynę o długości swobodnej L = 0,5 m i stałej sprężystości 100 N/m, a do niej zaczepiono ciężarek o masie m = 1 kg. Oblicz: a) gdzie znajduje się położenie równowagowe, b) odległość od szczytu równi do najniższego punktu, do którego sięga ciężarek w trakcie drgań, c) okres drgań

Odp.: a) 55 cm od szczytu równi, b) 60 cm od szczytu równi, c) 0,628 s

3. Do sprężyny, zawieszonej na suficie o długości początkowej L = 0.3m zaczepiono ciężarek, który po swobodnym puszczeniu wykonuje drgania o amplitudzie 0,1 m. Kiedy zaczepiono drugi ciężarek o masie m = 1 kg, okres drgań wyniósł 1 s. Ile wynosi stała sprężystości sprężyny i masa pierwszego ciężarka?

Odp.: m_x *= 0,65 kg, k = 65 n/m*

4. Okres drgań wahadła składającego się z cienkiej, nieważkiej nitki o długości L i ciężarka wynosi T. Jak należy dobrać długość nici by uzyskać okres drgań: a) dwa razy dłuższy, b) trzykrotnie krótszy?

Odp.: a) L' = 4L, b) L' = L/9

5. Oblicz okres drgań dysku o średnicy D = 1 m, zawieszonego na osi przechodzącej przez jego krawędź prostopadle do płaszczyzny dysku.

Odp.: $T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{6D}{g}} = 1{,}2s$

6. Wahadło zegarowe wykonano zaczepiając dysk o masie m_2 = 2 kg i średnicy L_2 = 0.2m do końca pręta o długości L_1 = 1m i masie m = 1 kg tak, że środek dysku znajduje się na końcu pręta, a jego płaszczyzna jest równoległa do pręta. Oblicz okres drgań bryły, jeśli oś obrotu umieścimy w połowie długości pręta, prostopadle do płaszczyzny dysku.

Odp. T = 1,6 s

7. Kulka o masie m = 0,1 kg zaczepiona na sprężynie wykonuje drgania harmoniczne. Zależność jej prędkości od czasu opisuje wzór: $v(t) = 10\frac{m}{s}\cos\left(6s^{-1}\cdot t\right)$ Jak zależy od czasu energia kinetyczna i potencjalna kulki? Oblicz największą energię kinetyczną, jaką osiąga kulka, jaka wtedy będzie energia potencjalna siły sprężystości?

   Odp.: $E_k(t) = 5J \cdot \cos^2\left(6s^{-1}\cdot t\right)$ $E_p(t) = 5J\left(1-\cos^2\left(6s^{-1}\cdot t\right)\right)$ $E_{k\,max} = 5J$ $E_p = 0$

8. W U-rurce o przekroju S znajduje się słup wody o długości l. Po wychyleniu z położenia równowagi słupek cieczy zaczął wykonywać drgania. Wykaż, że są to drgania harmoniczne i znajdź okres drgań.

   Odp.: $k = \rho g S$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

9. Położenie ciała wykonującego drgania harmoniczne opisuje wzór : $x(t) = A\cos(\omega t)$, gdzie A = 2 m. ω = 0,2 s^{-1}. Jaka jest największa prędkość ciała?

   Odp.: v = 0,4 m/s

10. Okres drgań ciała o masie m =10 g zaczepionego na sprężynie wynosi T = 2 s. Amplituda drgań równa jest A = 20cm. Znaleźć współczynnik sprężystości sprężyny i maksymalną prędkość ciała.

    Odp.: k = 0,1 N/m, v_{max} = 0,628 m/s