PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Mechanika kwantowa

Zadania z rozwiązaniami

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zad1. Oblicz czynnik normujący dla funkcji: $f_1 = A\cos\theta,\ f_2 = B\sin\theta \cdot e^{i\varphi}.$

Określonych dla $\theta \in \langle 0, \pi \rangle,\ \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$

Przyjmując element dV w przestrzeni (θ,φ) jako: $dV = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi.$

Wykazać, że są to funkcje ortogonalne.

Rozwiązanie:

Warunek unormowania funkcji: $\int f^* f \cdot dV = 1$ stąd $\int f_1^* f_1 \cdot dV = 1$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f_1^* f_1 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = 1$$

$$|A|^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = 1$$

$$|A|^2 \int_0^{\pi} \cos^2\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta = \frac{1}{2\pi}$$

$\cos\theta = y$ czyli $-\sin\theta \cdot d\theta = dy$

$$-|A|^2 \int_1^{-1} y^2 dy = \frac{1}{2\pi} \qquad |A|^2 \int_{-1}^{1} y^2 dy = \frac{1}{2\pi} \qquad |A|^2 \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{2\pi}$$

$$|A|^2 = \frac{3}{4\pi} \qquad A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}$$

Podobnie w przypadku drugiej funkcji: $\int f_2^* f_2 \cdot dV = 1$

$$|B|^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^3\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = 1 \qquad B = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}$$

Warunek ortogonalności funkcji w przestrzeni zespolonej

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \int f_1^* f_2 \cdot dV = 0$$

$$A^* B \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos\theta \cdot \sin^2\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi =$$

$\sin\theta = y$ czyli $\cos\theta \cdot d\theta = dy$

$$2\pi \cdot A^* B \int_0^{\pi} \cos\theta \cdot \sin^2\theta \cdot d\theta = 2\pi \cdot A^* B \int y^2 \cdot dy = 2\pi \cdot A^* B \cdot \frac{y^3}{3} \Big| =$$

Ostatecznie otrzymujemy: $2\pi \cdot A^* B \cdot \frac{\sin^3\theta}{3} \Big|_0^{2\pi} = 0$

Zad2. Cząstka znajduje się w przedziale $(0,\infty)$.

Jej własności falowe opisane są funkcją: $f(x) = Ax^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w przedziale (0,1)?

Rozwiązanie:

$$P_{(a,b)} = \int_a^b f^* f \cdot dx$$

Oczywiście funkcja musi być unormowana, tj. $\int f^* f \cdot dV = 1$

Z warunku unormowania wyznaczamy stałą A.

$$\int_0^\infty f^* f \cdot dx = |A|^2 \int_0^\infty x^4 \cdot e^{-x} dx = 1$$

Całkując 4-krotnie przez części otrzymujemy: $A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$

$$P_{(a,b)} = \int_0^1 f^* f \cdot dx = \frac{1}{24}\int_0^1 x^4 \cdot e^{-x} dx = 0.157$$

Zad3. Zakładając, że atom wodoru jest opisany modelem Bohra, znaleźć r, v, p, L dla 1-ej i drugiej orbity bohrowskiej. Wyrazić te wielkości przy pomocy stałej struktury subtelnej.

Rozwiązanie:

Stała struktury subtelnej dana jest w postaci stałych fizycznych: $$\alpha = \frac{e^2}{2 \cdot h \cdot c \cdot \varepsilon_0} \approx \frac{1}{137},$$

gdzie e jest ładunkiem elektronu, , h jest stałą Plancka, c prędkością światła, a ε_0 jest przenikalnością elektryczną próżni.

Orbity stabilne $$mvr_n = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar,$$ czyli $$L_1 = \hbar,$$ $$L_2 = 2\hbar$$

A ponieważ $$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

Stąd $$v_n = \frac{1}{n}\frac{e^2}{2h\varepsilon_0} = \frac{1}{n}\alpha \cdot c,$$ $$v_1 = \alpha \cdot c,$$ $$v_2 = \frac{\alpha \cdot c}{2}$$

$$p_n = mv_n = \frac{1}{n} m \cdot \alpha \cdot c,$$

$$p_1 = \alpha \cdot m \cdot c,$$

$$p_2 = \frac{\alpha \cdot m \cdot c}{2},$$

oraz $$r_n = \frac{n \cdot \hbar}{m \cdot v_n} = \frac{n^2 \cdot \hbar}{\alpha \cdot m \cdot c},$$

$$r_1 = \frac{\hbar}{\alpha \cdot m \cdot c},$$

$$r_2 = \frac{4\hbar}{\alpha \cdot m \cdot c}$$

Zad4. Cząstka opisana jest funkcją falową w postaci: $f(r) = Ae^{-\beta r}, \quad \beta \in R_+$

Obliczyć w tym stanie następujące parametry: $A, < r >, < r^2 >, (\Delta r)^2.$

Obliczyć prawdopodobieństwo znalezienia cząstki
w obszarze r>Δr.

Rozwiązanie

Czynnik normujący obliczymy z tego, że prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w całym
Obszarze jest równe 1.

$$\int_V |f(r)|^2 dV = 1 = \int_0^\infty 4\pi r^2 dr |A|^2 e^{-2\beta r} = 4\pi |A|^2 \int_0^\infty r^2 e^{-2\beta r} dr = \frac{\pi |A|^2}{\beta^3}$$

Ponieważ

$$\int_0^\infty dx x^n e^{-x} = \Gamma(n+1) = n!$$

Ostatecznie $A = \sqrt{\frac{\beta^3}{\pi}}$

$$< r >= \int_V dV r |f(r)|^2 = 4\pi |A|^2 \int_0^\infty r^3 e^{-2\beta r} dr = \frac{3}{2\beta}$$

$$< r^2 > = \int_V r^2 dV \left| f(r) \right|^2 = \int_0^\infty 4\pi |A|^2 r^4 e^{-2\beta r} dr = \frac{3}{\beta^2}$$

Stąd $$(\Delta r)^2 = < r^2 > - < r >^2 = \frac{3}{4\alpha^2}$$ czyli $$(\Delta r) = \sqrt{\frac{3}{2\alpha}}$$

$$P(r > \Delta r) = \int_{\Delta r}^\infty dV \left| f(r) \right|^2 = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2\beta}}^\infty 4\pi |A|^2 r^2 e^{-2\beta r} dr = \frac{1}{2}(5 + 2\sqrt{3}) e^{-\sqrt{3}} \approx 0.7487$$

Zad5. Oblicz komutator $[\hat{H}, \hat{p}_x{}^2]$ jeśli $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{\vec{r}}^2}{2}$.

Rozwiązanie:

Można łatwo pokazać (przemienność różniczkowania), że $[\hat{p}_i{}^2, \hat{p}_j{}^2] = 0$

Stąd

$$[\hat{H}, \hat{p}_x{}^2] = [\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{\vec{r}}^2}{2}, \hat{p}_x{}^2] = [\frac{m\omega^2 \hat{\vec{r}}^2}{2}, \hat{p}_x{}^2] = \frac{m\omega^2}{2}[\hat{\vec{r}}^2, \hat{p}_x{}^2]$$

Ponieważ: $\hat{\vec{r}}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2, \quad \Rightarrow [\hat{r}_i{}^2, \hat{p}_j{}^2] = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j$

Więc $[\hat{H}, \hat{p}_x{}^2] = \frac{m\omega^2}{2}[\hat{x}^2, \hat{p}_x{}^2]$

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \Rightarrow \hat{p}_x{}^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$[\hat{H},\hat{p}_x{}^2]\Psi(x)=\frac{m\omega^2}{2}[\hat{x}^2,\hat{p}_x{}^2]\Psi(x)=\frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}^2\hat{p}_x{}^2-\hat{x}^2\hat{p}_x{}^2)\Psi(x)=$$

$$\frac{m\omega^2}{2}(-\hbar^2x^2\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2}+\hbar^2\frac{\partial^2(x^2\Psi(x))}{\partial x^2})=$$

$$\frac{m\omega^2\hbar^2}{2}[-x^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}(2x\Psi(x)+x^2\frac{\partial\Psi}{\partial x})]=$$

$$m\omega^2\hbar^2[\Psi(x)+2x\frac{\partial\Psi}{\partial x}]=m\omega^2\hbar^2[1+2x\frac{\partial}{\partial x}]\Psi(x)$$

I ostatecznie

$$[\hat{H},\hat{p}_x{}^2]=m\omega^2\hbar^2[1+2x\frac{\partial}{\partial x}]$$

Zad6. Jaka powinna być szerokość nieskończenie głębokiej studni potencjału dla elektronu, a jaka dla protonu jeśli przejście z poziomu n=2 na poziom n=1 wiąże się z emisją kwantu energii ΔE=1eV.

Rozwiązanie:

Poziomy energetyczne w nieskończenie głębokiej studni o szerokości L: $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2.$

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \qquad E_2 = \frac{2\hbar^2 \pi^2}{mL^2} \qquad \Delta E = E_2 - E_1 = \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$$

$$L^2 = \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2m\Delta E} \qquad L = \hbar\pi\sqrt{\frac{3}{2m\Delta E}}$$

$$L_e = \hbar\pi\sqrt{\frac{3}{2m_e\Delta E}} \approx 3{,}19 nm$$

$$L_p = \hbar\pi\sqrt{\frac{3}{2m_p\Delta E}} \approx 94{,}1 pm$$

Zad7. Udowodnić, że wartość średnia pędu cząstki w przestrzeni jednowymiarowej w stanie o określonej energii (widmo dyskretne) jest równa zeru. Wskazówka, rozważyć komutator [H,x].

Rozwiązanie:

Hamiltonian cząstki o określonej energii możemy zapisać w postaci:

$$H = E_{kin} + V(x)$$

Stąd operator Hamiltona ma postać:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

Rozważamy komutator [H,x].

$$[\hat{H},\hat{x}]\Psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x), x\right]\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)x\Psi -$$

$$x\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)x\Psi - x\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)\Psi =$$

$$[\hat{H},\hat{x}]\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)x\Psi - x\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dx^2}x\Psi - x\frac{d^2}{dx^2}\Psi\right) =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d}{dx}(\Psi + x\frac{d\Psi}{dx}) - x\frac{d^2}{dx^2}\Psi\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left((\frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\Psi}{dx} + x\frac{d^2\Psi}{dx^2}) - x\frac{d^2\Psi}{dx^2}\right)$$

Ostatecznie komutator [H,x] możemy zapisać:

$$[\hat{H},\hat{x}]\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left((\frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\Psi}{dx} + x\frac{d^2\Psi}{dx^2}) - x\frac{d^2\Psi}{dx^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{d\Psi}{dx}$$

$$[\hat{H},\hat{x}] = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{d}{dx}$$

Stąd średnią wartość operatora pędu w stanie o określonej energii możemy zapisać:

$$< \hat{p}_x > = < i\hbar\frac{d}{dx} > = i\hbar < \frac{d}{dx} > = i\hbar < -\frac{m}{\hbar^2}[\hat{H},\hat{x}] > =$$

$$= -\frac{im}{\hbar} < [\hat{H},\hat{x}] >$$

$$<[\hat{H},\hat{x}]>_n=\int_V \Psi_n^*[\hat{H},\hat{x}]\Psi_n dx=\int_V \Psi_n^*(\hat{H}\hat{x}-\hat{x}\hat{H})\Psi_n dx=$$

$$\int_V \Psi_n^*(\hat{H}x-xE_n)\Psi_n dx=\int_V \Psi_n^*(\hat{H}-E_n)x\Psi_n dx=\int_V \Psi_n^*(\hat{H}-E_n)\Psi' dx$$

$$\Psi'=\sum_j c_j\Psi_j$$

Stąd

$$<[\hat{H},\hat{x}]>_n=\int_V \Psi_n^*\hat{H}\sum_j c_j\Psi_j dx-E_n\int_V \Psi_n^*\sum_j c_j\Psi_j dx=$$

$$\sum_j c_j\int_V \Psi_n^*\hat{H}\Psi_j - E_n\sum_j c_j\int_V \Psi_n^*\Psi_j=\sum_j c_j E_j\int_V \Psi_n^*\Psi_j - E_n\sum_j c_j\delta_{nj}=$$

$$\sum_j c_j E_j\delta_{nj} - E_n\sum_j c_j\delta_{nj}=c_nE_n-c_nE=0$$

Czyli $<\hat{p}_x>_n=0$

Zad8. Cząstka uwięziona w obszarze <0,1> opisana jest funkcją falową $\Psi(x) = Cx(1-x)$,

gdzie C jest stałą normalizacyjną. Znaleźć C.

Pokazać, że: $\Delta x = \sqrt{\frac{1}{28}}, \quad \Delta p = \sqrt{10}\hbar.$

Rozwiązanie:

Stałą C wyliczamy z warunku normalizacyjnego

$$\int_V |\Psi(x)|^2 dx = 1 = \int_0^1 |C|^2 x^2 (1-x)^2 dx = |C|^2 \int_0^\infty (x^4 + x^2 - 2x^3) dx =$$

$$= |C|^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{|C|^2}{30} \qquad C = \sqrt{30}$$

$$< x > = \int_0^1 x|\Psi(x)|^2 dx = |C|^2 \int_0^1 (x^5 + x^3 - 2x^4) dx = |C|^2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5}\right) = \frac{|C|^2}{60} = \frac{1}{2}$$

$$< x^2 > = \int_0^1 x^2 |\Psi(x)|^2 dx = |C|^2 \int_0^1 (x^6 + x^4 - 2x^5) dx = |C|^2 \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{|C|^2}{105} = \frac{2}{7}$$

$$\Delta x = \sqrt{<x^2> - <x>^2} = \sqrt{\frac{2}{7} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{28}}$$

$$\hat{p}_x = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \qquad \hat{p}_x^{\ 2} = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$<p_x> = \int_V \Psi^*(x)\, \hat{p}_x \Psi(x) dx$$

$$\hat{p}_x \Psi(x) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} Cx(1-x) = i\hbar C(1-2x)$$

$$\hat{p}_x^2 \Psi(x) = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} Cx(1-x) = -\hbar^2 C(-2) = 2\hbar^2 C$$

$$<p_x> = \int_V Cx(1-x) i\hbar C(1-2x) dx = i\hbar |C|^2 \int_0^1 x(1-3x+2x^2) dx =$$

$$i\hbar |C|^2 0 = 0$$

$$<p_x^2> = \int_V \Psi^*(x)\, \hat{p}_x^2 \Psi(x) dx = \int_0^1 Cx(1-x)(-\hbar^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} Cx(1-x) dx =$$

$$< p_x^2 > = 2\hbar^2 |C|^2 \int_0^1 x(1-x)dx = 2\hbar^2 |C|^2 (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{\hbar^2 |C|^2}{3} = 10\hbar^2$$

$$\Delta p_x = \sqrt{< p_x^2 > - < p_x >^2} = \sqrt{10\hbar^2} = \sqrt{10}\hbar$$

Zad9. Pokazać, że dla operatora momentu pędu $\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{L}} \neq \hat{\vec{0}}$

oraz $[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0,$ gdzie $\hat{L}^2 = \hat{L}_x{}^2 + \hat{L}_y{}^2 + \hat{L}_z{}^2.$

Rozwiązanie:

$$\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{L}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hat{L}_x & \hat{L}_y & \hat{L}_z \\ \hat{L}_x & \hat{L}_y & \hat{L}_z \end{vmatrix} = \vec{i}\,(\hat{L}_y\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_y) - \vec{j}\,(\hat{L}_x\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_x) + \vec{k}\,(\hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x)$$

$$= \vec{i}\,(i\hbar\hat{L}_x) - \vec{j}\,(-i\hbar\hat{L}_y) + \vec{k}\,(i\hbar\hat{L}_z) = i\hbar\hat{\vec{L}}$$

Gdzie skorzystano z tego, że $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$ i cyklicznie dla pozostałych współrzędnych

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = [\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \hat{L}_z] = [\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2, \hat{L}_z] = [\hat{L}_x^2, \hat{L}_z] + [\hat{L}_y^2, \hat{L}_z] =$$

$$= \hat{L}_x^2\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_y^2$$

Wykorzystując $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$ i zależności podobne możemy napisać

$$[\hat{L}^2,\hat{L}_z]=\hat{L}_y(\hat{L}_x\hat{L}_y-i\hbar\hat{L}_z)-(i\hbar\hat{L}_z+\hat{L}_y\hat{L}_x)\hat{L}_y+$$
$$\hat{L}_z(i\hbar\hat{L}_z+\hat{L}_x\hat{L}_z)-(\hat{L}_x\hat{L}_y-i\hbar\hat{L}_z)\hat{L}_z=-i\hbar(\hat{L}_y\hat{L}_z+\hat{L}_z\hat{L}_y)+$$
$$i\hbar(\hat{L}_y\hat{L}_z+\hat{L}_z\hat{L}_y)=\hat{0}$$

Podobnie wykazujemy dla pozostałych współrzędnych, tj.

$$[\hat{L}^2,\hat{L}_x]=\hat{0}$$
$$[\hat{L}^2,\hat{L}_y]=\hat{0}$$

Zad10. Rotator płaski o masie m i ramieniu R opisany jest funkcją

$$\Psi(\varphi) = C\cos^3\varphi \qquad \varphi \in <0, 2\pi>$$

gdzie C jest stałą . Jakich wyników i z jakimi prawdopodobieństwami należy oczekiwać przy pomiarze energii i momentu pędu?

Rozwiązanie:

Stan rotatora płaskiego jest opisany przez funkcje własne operatora momentu pędu, dokładnie składowej zetowej momentu pędu.

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad \Phi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}, \qquad m =: 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

$$\hat{L}_z\Phi_m = l_z\Phi_m \qquad l_z = m\hbar.$$

Wtedy operator Hamiltona rotatora płaskiego przyjmie postać:

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}_z^2}{2I} \qquad \hat{H}\Phi_m = E_m\Phi_m = \frac{\hat{L}_z^2}{2I}\Phi_m = \frac{m^2\hbar^2}{2I}\Phi_m$$

Z warunku unormowania funkcji wyznaczamy stałą C.

$$1=\int_V \Phi_m \Phi_m^* dV=\int_0^{2\pi}|C|^2\cos^4\varphi\cdot d\varphi=|C|^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)^4 d\varphi=$$

$$=\cdots=\frac{|C|^2\cdot 6}{2^4}2\pi=\frac{|C|^2 3\pi}{4}$$

$$C=\frac{2}{\sqrt{3\pi}}.$$

Funkcję opisującą stan rotatora możemy rozłożyć w bazie funkcji własnych:

$$\Phi_m=\frac{2}{\sqrt{3\pi}}\cos^2\varphi=\frac{2}{\sqrt{3\pi}}\left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)^2=\frac{1}{2\sqrt{3\pi}}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i2\varphi}+\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i2\varphi}+\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i0\varphi}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\Phi_2+\frac{1}{\sqrt{6}}\Phi_{-2}+\sqrt{\frac{2}{3}}\Phi_0=c_2\Phi_2+c_{-2}\Phi_{-2}+c_0\Phi_0$$

Rotator może być w stanie własnym opisanym liczbą m=2, m=-2 oraz m=0.

$$\Phi_m = \frac{1}{\sqrt{6}}\Phi_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Phi_{-2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\Phi_0 = c_2\Phi_2 + c_{-2}\Phi_{-2} + c_0\Phi_0$$

Moduł współczynnika rozwinięcia funkcji w bazie funkcji własnych do kwadratu określa prawdopodobieństwo znalezienia układu w danym stanie własnym, tj.

$$P_m = \left|c_m\right|^2, P_2 = \frac{1}{6}, P_{-2} = \frac{1}{6}, P_0 = \frac{2}{3}.$$

Prawdopodobieństwa te jednocześnie określają możliwość otrzymania w wyniku pomiaru momentu pędu, odpowiednio:

$$l_z = 2\hbar, l_z = -2\hbar, l_z = 0.$$

Stany opisanym liczbą m=2, m=-2 odpowiadają tej samej energii, więc prawdopodobieństwo uzyskania energii :

$$E_2 = \frac{2\hbar^2}{I} \quad \text{oraz} \quad E_0 = 0$$

Wynoszą odpowiednio:

$$P_{E_2} = \frac{1}{3}, P_{E_0} = \frac{2}{3}.$$

Zad11. Wykazać poniższe tożsamości dla macierzy Pauliego

$$\sigma_x^{\ 2} = \sigma_y^{\ 2} = \sigma_z^{\ 2} = I^2 = I$$

$$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z$$

Znaleźć komutator i antykomutator dla poszczególnych macierzy Pauliego, tj:

$$[\sigma_i, \sigma_j], \quad \text{oraz} \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i$$

Rozwiązanie:

Wykazanie dwóch pierwszych linijek zależności jest oczywiste, gdyż sprowadza się do mnożenia odpowiednich macierzy Pauliego, przedstawionych poniżej.

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Podobnie obliczając komutator i anty komutator dla różnych kombinacji macierzy Pauliego, można pokazać, że reguły komutacji i antykomutacji można zapisać w poniżej podany sposób:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_\mathrm{k} \quad \text{oraz} \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} I \quad (\text{I - macierz jednostkowa})$$

Zad12. Rozwiązać zagadnienie własne dla dwuwymiarowej macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

Zagadnienie własne dla operatora macierzowego ma postać:

$$\hat{M}\vec{X} = \lambda \hat{I}\vec{X}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zagadnienie ma rozwiązanie niezerowe o ile wyznacznik główny jest równy 0, czyli

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \qquad \Delta = 16$$

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_1 = 3$$

Dla wartości własnej $\lambda_1 = -1$ mamy

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_1 = a \Rightarrow x_2 = -a$$

Wektor własny ma postać $\vec{X}_1 = a\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Dla wartości własnej $\lambda_2 = 3$ mamy

$$-2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_1 = a \Rightarrow x_2 = a$$

Drugi wektor własny ma postać $\vec{X}_2 = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Widać, że iloczyn skalarny wektorów jest równy 0, więc są ortogonalne. Żeby wektory były Unormowane, to

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Zad13. Wykazać, że wartości średnie operatora położenia i pędu dla każdego stanu własnego

cząstki w nieskończonej studni potencjału są równe odpowiednio: $\langle \hat{x} \rangle = \frac{a}{2}, \langle \hat{p} \rangle = 0$

A dyspersja położenia i pędu w tych stanach wynosi:

$$< \hat{x}^2 >= \frac{a^2}{3}(1 - \frac{3}{2n^2\pi^2})$$

$$< \hat{p}_x^2 >= \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{a^2}$$

Wykazać, że spełniona jest relacja nieoznaczoności, tj.

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Wskazówka: $$\Psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} & \text{dla x} \in < 0, \text{a} > \\ 0 \text{ dla pozostalych x} \end{cases}$$

Rozwiązanie:

$$\left\langle \hat{x} \right\rangle = \frac{2}{a}\int_0^a x\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \frac{2}{a}\int_0^a x\frac{1-\cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)}{2}dx = \frac{2}{a}\int_0^a \frac{x}{2}dx -$$

$$\frac{2}{2a}\int_0^a x\cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{a}\left[\left(\frac{2n\pi}{a}\right)^{-1}\sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\Bigg|_0^a\right] +$$

$$= \frac{1}{a}\left[\int_0^a \left(\frac{2n\pi}{a}\right)^{-1}\sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)dx\right] = \cdots = \frac{a}{2}$$

$$\left\langle \hat{p}_x \right\rangle = i\hbar\frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\frac{n\pi}{a}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \frac{i\hbar n\pi}{a^2}\int_0^a \sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)dx = \cdots =$$

$$-\frac{i\hbar}{2a}(1-1) = 0$$

$$\left\langle \hat{x}^2 \right\rangle = \frac{2}{a}\int_0^a x^2\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \frac{2}{a}\int_0^a x^2\frac{1-\cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)}{2}dx = \frac{2}{a}\int_0^a \frac{x^2}{2}dx -$$

$$\frac{2}{2a}\int_0^a x^2\cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)dx = \frac{a^2}{3} - \frac{1}{a}\int_0^a x^2\cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)dx = \cdots = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2n^2\pi^2}$$

$$\left\langle \hat{p}_x^2 \right\rangle = -\hbar^2 \frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \frac{2\hbar^2 n^2\pi^2}{a^3}\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx =$$

$$\cdots = \frac{2\hbar^2 n^2\pi^2}{a^3}\cdot\frac{a}{2} = \frac{\hbar^2 n^2\pi^2}{a^2}$$

$$\Delta x = \sqrt{< x^2 > - < x >^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2n^2\pi^2} - \frac{a^4}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{n^2\pi^2}}$$

$$\Delta p_x = \sqrt{< p_x^2 > - < p_x >^2} = \sqrt{< p_x^2 >} = \sqrt{\frac{\hbar^2 n^2\pi^2}{a^2}} = \frac{\hbar n\pi}{a}$$

$$\Delta x\Delta p_x = \frac{a}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{n^2\pi^2}}\,\frac{\hbar n\pi}{a} = \frac{\hbar n\pi}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{n^2\pi^2}} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{n^2\pi^2 - 1} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Zad14. Wykazać, że funkcja falowa $\Psi(r,x) = Af(r)x$

Jest funkcją własną operatorów L^2 i L_x ?

Rozwiązanie:

$$\hat{\vec{L}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ \mathrm{x} & \mathrm{y} & \mathrm{z} \\ \hat{\mathrm{p}}_{\mathrm{x}} & \hat{\mathrm{p}}_{\mathrm{y}} & \hat{\mathrm{p}}_{\mathrm{z}} \end{vmatrix} \qquad \hat{L}_x = \mathrm{y}\hat{\mathrm{p}}_{\mathrm{z}} - z\hat{\mathrm{p}}_{\mathrm{y}}$$

$$\hat{L}_x\Psi = (\mathrm{y}\hat{\mathrm{p}}_{\mathrm{z}} - \mathrm{z}\hat{\mathrm{p}}_{\mathrm{y}})\Psi = i\hbar\left[\mathrm{y}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} - z\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\right]\Psi =$$

$$i\hbar\left[\mathrm{y}\frac{\partial\Psi}{\partial \mathrm{z}} - z\frac{\partial\Psi}{\partial \mathrm{y}}\right] = i\hbar\left[\mathrm{y}\frac{\partial\Psi}{\partial \mathrm{r}}\frac{\partial r}{\partial \mathrm{z}} - z\frac{\partial\Psi}{\partial \mathrm{r}}\frac{\partial r}{\partial \mathrm{y}}\right] = i\hbar\left[\mathrm{y}\frac{\partial\Psi}{\partial \mathrm{r}}\frac{2z}{2\mathrm{r}} - z\frac{\partial\Psi}{\partial \mathrm{r}}\frac{2y}{2\mathrm{r}}\right] =$$

$$0 = 0\Psi$$

Ponieważ operatory komutują $[L^2, L_x] = 0$ to mają wspólny zbiór funkcji własnych.

Można też znaleźć wartość własną odpowiadającą tej funkcji własnej:

$$\hat{L}_x^2\Psi = 0\Psi$$

$$\hat{L}_y^2\Psi = -(\mathrm{x}\hat{\mathrm{p}}_\mathrm{z} - \mathrm{z}\hat{\mathrm{p}}_\mathrm{x})^2\Psi = -\hbar^2\left(\mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} - z\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\right)^2\Psi =$$

$$-\hbar^2\left(\mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} - z\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\right)\left(\mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} - z\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\right)\Psi = -\hbar^2\left(\mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} - z\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\right)\cdot$$

$$\left[\mathrm{x}\frac{2\mathrm{z}}{2\mathrm{r}}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{r}}Ax - z\left(\mathrm{A}\frac{2\mathrm{x}}{2\mathrm{r}}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{r}}x - Af\right)\right] = -\hbar^2 A\left(\mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} - z\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\right)(f\mathrm{z}) =$$

$$-\hbar^2 A\left[\mathrm{x}\frac{2\mathrm{z}}{2\mathrm{r}}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{r}}z - xAf - \frac{2\mathrm{x}}{2\mathrm{r}}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{r}}z^2\right] = \hbar^2 Axf(r) = \hbar^2\Psi$$

Analogicznie dla składowej z

$$\hat{L}_z^2\Psi = (\mathrm{x}\hat{\mathrm{p}}_\mathrm{y} - y\hat{\mathrm{p}}_\mathrm{x})^2\Psi = \hbar^2\Psi$$

czyli $$\hat{L}^2\Psi = (\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2) = \hbar^2\Psi$$

Zad15. Wykazać, że funkcja u(x) jest funkcją własną operatora H. Znaleźć wartość własną odpowiadającą tej funkcji własnej.

$$u(x) = \exp(-\frac{x^2}{2}), \qquad \hat{H} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2$$

Rozwiązanie:

Aby funkcja była funkcją własną operatora, powinna istnieć wartość własna, dla której spełnione jest zagadnienie własne dla operatora.

$$\hat{H}u(x) = au(x)$$

$$\hat{H}u(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2\right)\exp(-\frac{x^2}{2}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\exp(-\frac{x^2}{2}) - x^2\exp(-\frac{x^2}{2}) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-x\exp(-\frac{x^2}{2})\right) - x^2\exp(-\frac{x^2}{2}) = -\exp(-\frac{x^2}{2}) - x\frac{\partial}{\partial x}\left(\exp(-\frac{x^2}{2})\right) -$$

$$x^2\exp(-\frac{x^2}{2}) = -\exp(-\frac{x^2}{2}) + x^2\exp(-\frac{x^2}{2}) - x^2\exp(-\frac{x^2}{2}) = -\exp(-\frac{x^2}{2})$$

Zatem spełnione jest zagadnienie własne, dla wartości własnej $a = -1$

Zad16. Cząstka w nieskończonej studni potencjału jest opisana funkcją falową:

$$\Psi(x,t=0)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_1(x)+\Psi_2(x)],\quad \text{gdzie } \Psi_{1,2}$$

są funkcjami falowymi cząstki w nieskończonej studni potencjału odpowiadającemu poziomowi energetycznemu n=1 i n=2. Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia tej cząstki w przedziale (0,0.5a) po czasie t?

Rozwiązanie:

Dla studni potencjału mamy: $\Psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$ $\quad E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

Po czasie t, cząstka będzie opisana następującą funkcją falową :

$$\Psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_1(x)e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}+\Psi_2(x)e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}],$$

Zaś prawdopodobieństwo znalezienia cząstki $P_{(0,\frac{1}{2}a)}=\int_0^{\frac{1}{2}a}\left|\Psi(x,t)\right|^2dx=$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}a}\{|\Psi_1(x)|^2 + |\Psi_2(x)|^2 + \Psi_1(x)\Psi_2(x)[e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t} + e^{-i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t}]\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}a}\Psi_1(x)\Psi_2(x)[e^{i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t} + e^{-i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t}]dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t\right)\int_0^{\frac{1}{2}a}\Psi_1(x)\Psi_2(x)dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}a}\Psi_1(x)\Psi_2(x)dx = \frac{2}{a}\int_0^{\frac{1}{2}a}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}dx = \frac{4}{a}\int_0^{\frac{1}{2}a}\sin^2\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}dx =$$

$$= \cdots = \frac{4}{3\pi}$$

Ostatecznie $$P_{(0,\frac{1}{2}a)} = \frac{1}{2} + \frac{4}{3\pi}\cos\left(\frac{3\hbar\pi^2}{2ma^2}t\right)$$

Zad17. Oscylator harmoniczny znajduje się w stanie opisanym funkcją falową

$$\Psi(x) = C[1+\frac{x}{\alpha}]\exp(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\alpha^2}),$$

gdzie C – stała normalizacyjna, $\alpha^2 = \frac{\hbar}{m\omega}.$

Jakie wyniki i z jakimi prawdopodobieństwami można otrzymać przy pomiarze energii tego oscylatora?

Rozwiązanie:

Funkcja falowa, można łatwo zauważyć, jest kombinacją liniową funkcji oscylatora w stanie opisanym liczbą kwantową n=0 i n=1.

$$\Psi(x) = c_0\Psi_0(x) + c_1\Psi_1(x)$$

$$\Psi_0(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}\exp(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\alpha^2}),$$

$$\Psi_1(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2}\frac{x}{\alpha}\exp(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\alpha^2}),$$

$$\Psi(x)=C[1+\frac{x}{\alpha}]\exp(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\alpha^2})=C\exp(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\alpha^2})+C\frac{x}{\alpha}\exp(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\alpha^2})=$$

$$=\frac{C}{\pi^{-\frac{1}{4}}}\pi^{-\frac{1}{4}}\exp(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\alpha^2})+\frac{C}{\pi^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2}}\pi^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2}\,\frac{x}{\alpha}\exp(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\alpha^2})=$$

$$\frac{C}{\pi^{-\frac{1}{4}}}\Psi_0(x)+\frac{C}{\pi^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2}}\Psi_1(x)=C\pi^{\frac{1}{4}}\Psi_0(x)+\frac{C\pi^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}\Psi_1(x)=$$

$$=c_0\Psi_0(x)+c_1\Psi_1(x)$$

Ponieważ funkcje bazowe są ortogonalne, to warunek unormowania będzie wymagał, by:

$$1=\left|c_0\right|^2+\left|c_1\right|^2 \qquad \left|C\right|^2\sqrt{\pi}+\left|C\right|^2\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1 \qquad c_0=\sqrt{\frac{2}{3}},c_1=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

W wyniku pomiaru możemy otrzymać dwie wartości energii:

$E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega, E_1=\frac{3}{2}\hbar\omega$ Z prawdopodobieństwami odpowiednio $P_{E_0}=\frac{2}{3},\mathrm{P}_{E_1}=\frac{1}{3}.$

Zad18. Rozważyć cząstkę opisaną funkcją falową:

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ax\exp(-\frac{\alpha x}{2}), & \text{dla } x \geq 0 \\ 0, & \text{dla } x < 0 \end{cases} \qquad \alpha \in R_+, \quad A = \sqrt{\frac{\alpha^3}{2}}.$$

Znaleźć położenie najbardziej prawdopodobne tej cząstki oraz
$< x >, < x^2 >, < p >, < p^2 >.$

Sprawdzić, że $\quad \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$

Wsk. $\quad \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^n dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \quad \text{dla } \; n > -1.$

Rozwiązanie:

Położenie najbardziej prawdopodobne cząstki jest określone przez maksimum funkcji gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki, stąd:

$$\frac{d}{dx}\left|\Psi(x)\right|^2 = \frac{d}{dx}\left|Ax\exp(-\frac{\alpha x}{2})\right|^2 = \frac{d}{dx}\left(\left|A\right|^2 x^2 \exp(-\alpha x)\right) =$$

$$\left|A\right|^2 2x\exp(-\alpha x) - \alpha\left|A\right|^2 x^2 \exp(-\alpha x) = \cdots = 0$$

Stąd $$(2x-\alpha x^2)\exp(-\alpha x)=0,\quad \text{czyli}\ x=0 \vee x=\frac{2}{\alpha}$$

Z czego $x=\dfrac{2}{\alpha}$ jest położeniem najbardziej prawdopodobnym.

$$<x>=\int_0^\infty A^* x e^{-\frac{\alpha x}{2}} x A x e^{-\frac{\alpha x}{2}} dx = |A|^2 \int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x} dx = |A|^2 \frac{3!}{\alpha^4} = |A|^2 \frac{6}{\alpha^4}$$

$$<x^2>=\int_0^\infty A^* x e^{-\frac{\alpha x}{2}} x^2 A x e^{-\frac{\alpha x}{2}} dx = |A|^2 \int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x} dx = |A|^2 \frac{4!}{\alpha^5} = |A|^2 \frac{24}{\alpha^5}$$

$$<p_x>=\int_0^\infty A^* x e^{-\frac{\alpha x}{2}} i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\left(A x e^{-\frac{\alpha x}{2}} \right) dx = i\hbar |A|^2 \int_0^\infty \left[x e^{-\alpha x} - \frac{\alpha}{2} x^2 e^{-\alpha x} \right] dx =$$

$$i\hbar |A|^2 \left[\frac{1!}{\alpha^2} - \frac{\alpha}{2}\frac{2!}{\alpha^3} \right] = 0$$

$$<p_x^2>=\int_0^\infty A^* x e^{-\frac{\alpha x}{2}} i\hbar i\hbar \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A x e^{-\frac{\alpha x}{2}} \right) dx = -\hbar^2 |A|^2 \int_0^\infty \left[-x\alpha e^{-\alpha x} + \frac{\alpha^2}{4} x^2 e^{-\alpha x} \right] dx =$$

$$<p_x^2> = -\hbar^2|A|^2\left[-\alpha\frac{1!}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{4}\frac{2!}{\alpha^3}\right] = -\hbar^2|A|^2\left[-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha}\right] = \frac{\hbar^2|A|^2}{2\alpha}$$

$$<x> = |A|^2\frac{6}{\alpha^4} = \frac{\alpha^3}{2}\frac{6}{\alpha^4} = \frac{3}{\alpha} \qquad <x^2> = |A|^2\frac{24}{\alpha^5} = \frac{\alpha^3}{2}\frac{24}{\alpha^5} = \frac{12}{\alpha^2}$$

$$<p_x^2> = \frac{\hbar^2|A|^2}{2\alpha} = \frac{\hbar^2}{2\alpha}\frac{\alpha^3}{2} = \frac{\hbar^2\alpha^2}{4}$$

$$\Delta x = \sqrt{<x^2> - <x>^2} = \sqrt{\frac{12}{\alpha^2} - \frac{9}{\alpha^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\alpha}$$

$$\Delta p_x = \sqrt{<p_x^2> - <p_x>^2} = \sqrt{\frac{\hbar^2\alpha^2}{4}} = \frac{\hbar\alpha}{2}$$

$$\Delta x\Delta p_x = \frac{\sqrt{3}}{\alpha}\frac{\hbar\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}\hbar}{2} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Zad19. Dwa stany cząstki odpowiadające energiom E_1 i E_2 są opisane przez ortonormalne funkcje falowe będące rozwiązaniem równania Schrodingera, gdzie:

$$\Psi_1(x,t) = \varphi_1(x)e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}}, \Psi_2(x,t) = \varphi_2(x)e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}.$$

Znaleźć stan, dla którego wartość oczekiwana energii wynosi: $\frac{1}{4}E_1 + \frac{3}{4}E_2.$

Znaleźć niepewność energii cząstki w tym stanie.

Rozwiązanie:

Ogólny stan cząstki możemy opisać funkcją $\Psi(x)$:

$$\Psi(x,t) = c_1\Psi_1(x,t) + c_2\Psi_2(x,t)$$

Zaś średnią wartość energii w tym stanie:

$$< E >= \int_V \Psi^*(x,t)(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})\Psi(x,t)dV = \cdots = |c_1|^2 E_1 + |c_2|^2 E_2$$

Stąd wynika, że:

$$|c_1|^2 = \frac{1}{4} \qquad |c_2|^2 = \frac{3}{4}$$

czyli

$$c_1 = \frac{1}{2} \qquad c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Stąd:

$$\Psi(x,t) = c_1\Psi_1(x,t) + c_2\Psi_2(x,t) = \frac{1}{2}\Psi_1(x,t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\Psi_2(x,t)$$

Podobnie,

$$< E^2 >= \int_V \Psi^*(x,t)(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})\Psi(x,t)dV = -\hbar^2 \int_V \Psi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi dV =$$

$$\cdots = \left|c_1\right|^2 E_1^2 + \left|c_2\right|^2 E_2^2 = \frac{1}{4}E_1^2 + \frac{3}{4}E_2^2$$

Ostatecznie, niepewność wyznaczenia energii w tym stanie wynosi:

$$\Delta E = \sqrt{< E^2 > - < E >^2} = \sqrt{\frac{1}{4}E_1^2 + \frac{3}{4}E_2^2 - \left(\frac{1}{4}E_1 + \frac{3}{4}E_2\right)^2} = \cdots =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\left(E_1 - E_2\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left|E_1 - E_2\right|$$

Zad20. Dla cząstki poruszającej się wzdłuż osi x wykazać, że

$[\hat{p}, \hat{T}] = 0, \quad \text{gdzie } \hat{\mathrm{T}}$ - operator energii kinetycznej cząstki.

Wykazać, że funkcja: $\Psi(\mathrm{x}) = \mathrm{A}\cos\mathrm{kx},$ jest funkcją własną operatora energii

kinetycznej ale nie jest funkcją własną operatora pędu.

Rozwiązanie:

Wykazanie, że operatory energii kinetycznej i pędu komutują w przypadku ruchu prostoliniowego,
Staje się oczywiste, jeżeli przedstawimy postać tych operatorów w reprezentacji położeniowej:

$$\hat{p}_x = i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{\mathrm{T}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Zatem komutacja tych dwóch operatorów wynika po prostu z tego, że nie ma znaczenia,
czy najpierw podziałamy na dowolnie wybraną funkcję falową operatorem pędu a następnie
Operatorem energii kinetycznej, czy odwrotnie.

Następnie sprawdzimy, podstawiając do zagadnienia własnego dla operatora pędu i energii
kinetycznej, czy funkcja Ψ(x) jest funkcją własną tych operatorów, tj.

$$\hat{p}_x \Psi(x) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} A\cos kx = -i\hbar k A\sin kx$$

$$\hat{\mathrm{T}}\Psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} A\cos kx = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} A\cos kx = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\Psi(x) = \alpha\Psi(x)$$

Z przeprowadzonych przekształceń wynika, że ww. funkcja jest funkcją własną operatora energii, natomiast nie jest funkcją własną operatora pędu.

Tutaj należy zaznaczyć, że powszechnie przyjmuje się stwierdzenia za prawdziwe, że dwa operatory hermitowskie, komutujące ze sobą, mają ten sam zbiór funkcji własnych.

Z tego wynikało by, że funkcja Ψ(x) powinna być funkcją własną obu tych operatorów.

Jednak dotyczy to tylko operatorów posiadających niezdegenerowane zagadnienie własne.

W tym przypadku, tej samej wartości własnej:

$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ odpowiadają dwie funkcje własne: $\Psi_1(x) = A\cos kx$ oraz $\Psi_2(x) = A\sin kx$

Dopiero ich kombinacja liniowa (suma) jest funkcją własną zarówno operatora energii kinetycznej jak i pędu.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zad1. Oblicz czynnik normujący dla funkcji

f_1 i f_2 określonych wzorami: $f_1(x) = Ae^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad f_2(x) = 2Bx \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2},$

Gdzie $x \in \Re$

Wykazać, że są to funkcje ortogonalne.

Odp. $A = \sqrt[4]{\frac{1}{\pi}}, \quad B = \sqrt[4]{\frac{1}{\pi}}\sqrt{\frac{1}{2}}.$

Zad2. Atom znajduje się w przestrzeni R^3.

Własności falowe elektronu w atomie opisane są funkcją: $\Psi(r) = Br \cdot \sin\theta \cdot e^{-\frac{r}{2}} \cdot e^{i\varphi}.$

Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w kuli o środku (0,0) i promieniu r=1?

W jakiej odległość od jądra jest największe prawdopodobieństwo znalezienia elektronu?

Odp. $P = 1 - \frac{55}{24e},$ e-podstawa logarytmu naturalnego.

Zad3. Elektron w atomie wodoru przechodzi z orbity opisanej w modelu Bohra liczbą n=2 na poziom podstawowy. Znaleźć energię kwantu emitowanego w wyniku przejścia oraz długość fali i częstotliwość emitowanego promieniowania.

Odp. $\lambda = 121.5 nm$

Zad4. Elektron przechodzi w atomie wodoru z orbity n=5 na orbitę n=1. Znaleźć energię i pęd Emitowanego elektronu. Znaleźć prędkość jądra jaką uzyskało ono w wyniku tego przejścia.

Odp. $p = 6.98 \cdot 10^{-27} \frac{kg \cdot m}{s}.$

Zad5. Elektron znajduje się w nieskończonej studni potencjału o szerokości d. Jak zmienią się wartości energii tego elektronu dla poziomu n=1 i n=2 jeżeli szerokość studni zmniejszymy dwukrotnie? Ile razy wzrośnie odległość energetyczna pomiędzy tymi poziomami? Jaka była początkowa szerokość studni, jeśli przejście z poziomu n=2 na poziom n=1 wiązało się z emisją Kwantu promieniowania o energii 1 eV?

Odp. 16-krotnie

Zad6. Wykazać że funkcja $\Psi + \Psi^*$ jest rozwiązaniem równania Schrodingera z Hamiltonianem rzeczywistym, jeśli rozwiązaniem równania Schrodingera jest funkcja

$$\Psi(x,t) = A\exp[\frac{i}{\hbar}(px - Et)].$$

Zad7. Obliczyć komutatory: $[\hat{L}_i, \hat{r}_j], [\hat{L}_i, \hat{p}_j], [\hat{L}_i, \hat{L}_j], [\hat{\vec{L}}, \hat{\vec{L}}],$

Wiedząc, że komutator $[\hat{r}_j, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ a $\hat{L}_i = \hat{\vec{L}}_i = (\vec{r} \times \vec{p})_i$

Odp.

Zad8. Pokazać, że dla stanów własnych hamiltonianu H zachodzi własność (tzw. reguła sum)

$$\sum_j \left|\left\langle j \middle| x \middle| n \right\rangle\right|^2 (E_j - E_n) = \frac{\hbar^2}{2m}$$

Wskazówka. Rozważyć komutator [x,[H,x]] oraz element <nI[x,[H,x]]Im>.

Zad9. Znaleźć funkcje własne i wartości własne operatora pędu.

Odp.

Zad10. Wykazać, że w stanach własnych operatora Lz wartości średnie operatorów Lx i Ly są równe 0. Wskazówka a) wykorzystać komutator [Ly,Lz] = ihLx i podobnie dla Ly oraz to, że Lz jest operatorem hermitowskim. b) można skorzystać z jawnej postaci funkcji własnej Lz oraz postaci operatorów Lx i Ly we współrzędnych kulistych.

Zad11. Wykazać, że cztery macierze Pauliego stanowią bazę wszystkich macierzy 2x2.

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Zad12. Dla operatorów macierzowych $\sigma_{+} = \sigma_x + i\sigma_y, \quad \sigma_{-} = \sigma_x - i\sigma_y$ oraz σ_z znaleźć reguły komutacji.

Odp.

Zad13. Obliczyć gęstość prawdopodobieństwa i gęstość prądu prawdopodobieństwa dla funkcji:

a) $$\Psi(x) = A\exp[\frac{i}{\hbar}(px - Et)], \; E = \frac{p^2}{2m}$$

b) $$\Psi(x) = A\exp(\frac{ip_0 x}{\hbar}) + B\exp(-\frac{ip_0 x}{\hbar})$$

Odp.

Zad14. Operator A odpowiadający wielkości a posiada dwie unormowane funkcje falowe f1 i f2, Którym odpowiadają wartości własne a1 i a2. Operator B odpowiadający obserwabli b posiada dwie funkcje własne g1 i g2, którym odpowiadają dwie wartości własne b1 i b2. Związki pomiędzy Tymi funkcjami mają postać:

$$f1 = 0.6g1 + 0.8g2$$

$$f2 = 0.8g1 - 0.6g2$$

W wyniku pomiaru wielkości a otrzymano wynik a1, następnie wykonano pomiar obserwabli b i ponownie pomiar wielkości a. Znaleźć prawdopodobieństwo otrzymania wyniku a1 w drugim Pomiarze.

Odp.

Zad15. Jaka jest wartość oczekiwana pędu cząstki <p> będącej w stanie kwantowym opisanym

funkcją $$\Psi(x) = A\exp[-(\frac{x}{a})^2 - i\omega t]\sin kx$$

Odp.

Zad16 Znaleźć unormowane funkcje własne operatora oraz odpowiadające im wartości własne. Jaki powinien być wymiar stałej k? Jaki wymiar będą mieć wrtości własne?

$$\hat{T} = k^2 x + \frac{d}{dx}$$

Odp. $$\frac{d\Phi}{dx} = (\lambda - k^2 x)dx \quad \Phi(x) = C\exp(\lambda x - \frac{k^2 x^2}{2})$$

$$C = \pi^{-\frac{1}{4}}\sqrt{k}\exp(-\frac{\lambda^2}{2k^2})$$

Zad17 Cząstka w nieskończonej studni potencjału o szerokości L opisana jest funkcją

$$\Phi(x) = A(L^2 - x^2), \qquad x \in < -L, L > .$$

Obliczyć $\Delta x, \Delta p$ dla tego stanu.

Odp.

Zad18. Znaleźć wartości własne i funkcje własne operatora macierzowego:

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 1 \end{bmatrix}$$

Odp.

Zad19 Wykazać zależności dla wartości oczekiwanych:

$$\frac{d < x >}{dt} = \frac{1}{m} < p >$$

$$\frac{d < p >}{dt} = -\left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$$

Zad20 Zortogonalizować 3 wektory bazowe przestrzeni:

$$|\alpha_1\rangle = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, |\alpha_2\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, |\alpha_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 32 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odp.

Zad21. Cząstka opisana jest funkcją falową $\Psi(x) = C\exp(-\gamma x + ikx)\theta(x)$

Znaleźć prawdopodobieństwo, że pomiar pędu da wynik z przedziału $(\hbar(k-\gamma), \hbar(k+\gamma))$

Zad22 Dla cząstki opisanej funkcją falową $\Phi(x) = A\exp(-x^2 / 2a^2), \quad a - const.$

Wykazać, że $< x >= 0, < x^2 >= \dfrac{a^2}{2}, < p >= 0, < p^2 >= \dfrac{\hbar^2}{2a^2}.$

Wsk. $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \dfrac{d^2\Psi}{dx^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{d\Psi^*}{dx} \dfrac{d\Psi}{dx} dx.$

Ponadto, pokazać że zachodzi relacja: $\Delta x \Delta p = \dfrac{\hbar}{2}.$

Zad23 Cząstki ograniczona do obszaru <-a/2,a/2> opisana jest funkcją falową

$$\Phi(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{a}} \cos\dfrac{\pi x}{a}, & \mathrm{x} \in < -\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2} > \\ 0 \quad \text{dla reszty} \end{cases}$$

Wykazać, że $< x >= 0 =< p >.$

Wsk. $\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 \cos^2 \dfrac{\pi x}{a} dx = \dfrac{a^3}{4\pi^2} (\dfrac{\pi^2}{6} - 1).$

Ponadto, pokazać że: $\Delta x \Delta p = \sqrt{\dfrac{\pi^2 - 6}{3}} \dfrac{\hbar}{2}.$