PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Fizyka relatywistyczna

Zadania z rozwiązaniami

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

Na spoczywającą cząstkę zaczyna działać stała siła. Jaką prędkość uzyska cząstka, gdy siła wykona pracę W?

Porównaj rozwiązanie klasyczne i relatywistyczne.

Rozwiązanie klasyczne:

Energię kinetyczną przyrównujemy do wykonanej pracy $\frac{m_0 v_{klas}^2}{2} = W \rightarrow v_{klas} = \sqrt{\frac{2W}{m_0}}$

Rozwiązanie relatywistyczne:

Energia kinetyczna wynosi : $mc^2 - m_0c^2$, czyli: $mc^2 - m_0c^2 = W$

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = W \rightarrow v_{relat.} = \sqrt{\frac{2W}{m_0}} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{W}{2m_0c^2}}}{1+\frac{W}{m_0c^2}} = v_{klas} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{W}{2m_0c^2}}}{1+\frac{W}{m_0c^2}}$$

Z porównania rozwiązań wynika, że wzór relatywistyczny przechodzi we wzór klasyczny, gdy spełniony jest warunek

$W << m_0c^2$, a zatem gdy praca wykonywana przez siłę przyspieszającą jest znacznie mniejsza od energii spoczynkowej przyspieszanej cząstki. Wynika stąd, że obok znanego kryterium stosowania mechaniki relatywistycznej, **gdy prędkość ciała jest bliska prędkości światła w próżni c**, można sformułować drugie kryterium, które mówi, że **mechanikę relatywistyczną stosujemy wtedy, gdy energia dostarczona ciału jest, co najmniej bliska jego energii spoczynkowej**.

Przykład: Weźmy jako cząstkę elektron o masie spoczynkowej $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg$ i ładunku $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C$ przyspieszany w polu elektrycznym (stałą siłą). Energię spoczynkową elektronu można obliczyć ze wzoru:

$$E_0 = m_0 c^2 \approx 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg \cdot 9 \cdot 10^{16}\, m^2/s^2 \approx 8{,}19 \cdot 10^{-14} J \approx 0{,}51 \cdot 10^6 eV = 0{,}51 MeV$$

Przypomnijmy, że używana w fizyce atomowej, relatywistycznej i jądrowej wygodna jednostka energii elektronowolt [eV] jest zdefiniowana jako energia, którą uzyskuje ładunek elementarny $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C$ przebywając różnicę potencjałów *U* = 1 V, czyli $1 eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19} J$. Wskutek przebycia drogi, dla której różnica potencjałów wynosi *U* elektron uzyskuje energię kinetyczną równą pracy wykonanej przez pole elektryczne *W* = *eU*. Rozważmy dwa przypadki:

1.Elektron przyspieszany w lampie kineskopowej w różnicy potencjałów U_1 = 25 kV uzyskuje energię $W_1 = eU_1 = 25 keV$

$\frac{W_1}{m_0 c^2} \approx 0{,}05$ zatem $$v_1 = v_{klas} \cdot \frac{\sqrt{1+0{,}025}}{1+0{,}05} \approx v_{klas} \cdot 0{,}96$$

gdzie $v_{klas} \approx 0{,}31 c$

Różnica między wartością prędkości końcowej obliczoną klasycznie i relatywistycznie jest niewielka.

2.Elektron przyspieszany w akceleratorze van de Graaffa w różnicy potencjałów U_2 = 25 MV uzyskuje energię

$W_2 = eU_2 = 25 MeV$, więc $\frac{W_2}{m_0 c^2} \approx 50$

stąd: $$v_2 = v_{klas} \cdot \frac{\sqrt{1+250}}{1+50} \approx v_{klas} \cdot 0{,}1$$

gdzie $v_{klas} \approx 9{,}9 c$

W tym przypadku wartość prędkości końcowej obliczona ze wzoru klasycznego jest oczywiście nonsensowna.

Zadanie 2

Cząstka o masie spoczynkowej m_0 porusza się z taką prędkością, że jej czas życia obserwowany w układzie laboratorium jest trzy razy dłuższy niż średni czas życia tej cząstki zmierzony wtedy, gdy cząstka jest w spoczynku. Oblicz energię kinetyczną i prędkość tej cząstki oraz jej pęd.

Rozwiązanie

Zależność między czasem własnym τ a czasem mierzonym w laboratorium *t*:

$$t = \gamma\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad t = 3\tau \rightarrow \gamma = 3$$

Energia kinetyczna wynosi: $E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2(\gamma - 1) = 2m_0c^2$

Aby obliczyć prędkość skorzystamy ze wzoru: $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 3 \rightarrow v = \frac{2\sqrt{2}}{3}c$

Pęd można obliczyć na dwa sposoby

1. z zależności między energią całkowitą, pędem i energią spoczynkową: $E = p^2c^2 + \left(m_0c^2\right)^2$

$$p^2c^2 = E^2 - m_0^2c^4 = \left(m_0c^2\gamma\right)^2 - m_0^2c^4 = m_0^2c^4\left(\gamma^2 - 1\right)$$

$$p = 2\sqrt{2}m_0c$$

2. Z definicji pędu:

$$p = mv = m_0\gamma v = 2\sqrt{2}m_0c$$

Zadanie 3

Obserwator *O* widzi dwa identyczne statki kosmiczne zbliżające się do niego z dwóch stron z prędkością $v = 0{,}8c$.

Długość własna statku wynosi d = 10 m. Jaką długość jednego z pojazdów obserwuje pilot drugiego pojazdu?

Rozwiązanie

Trzeba obliczyć prędkość jednego ze statków względem drugiego.

$$v' = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{1{,}6c}{1 + \frac{0{,}64c^2}{c^2}} = 0{,}976c$$

Długość jednego pojazdu w układzie drugiego:

$$d' = d\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} = d\sqrt{1 - \frac{(0{,}976c)^2}{c^2}} = 0{,}22d = 2{,}2m$$

Odp.: Pilot widzi drugi pojazd o długości 2,2 m.

Zadanie 4

Zdarzenie *A* ma w układzie *O* współrzędne czasoprzestrzenne x_A, ct_A, zdarzenie *B* - współrzędne czasoprzestrzenne x_B, ct_B. Czy może istnieć związek przyczynowy między tymi zdarzeniami? Wartości współrzędnych:

a) $x_A = 1$, $ct_A = 2$, $x_B = 5$, $ct_B = 5$, b) $x_A = 2$, $ct_A = 0$, $x_B = 3$, $ct_B = 6$

Rozwiązanie a)

Kwadrat interwału czasoprzestrzennego między zdarzeniami A i B w układzie O wynosi:

$$\Delta S^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (ct_A - ct_B)^2 - (x_A - x_B)^2 = 9 - 16 = -7$$

Interwał czasoprzestrzenny jest urojony: $c\Delta t < \Delta x$

Oznacza to, że między zdarzeniami **nie może być związku przyczynowego** – zdarzenia są tak daleko od siebie (duże Δx), że światło nie zdąży dotrzeć od zdarzenia A do B w czasie Δt

Rozwiązanie b)

Kwadrat interwału czasoprzestrzennego między zdarzeniami A i B w układzie O wynosi:

$$\Delta S^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (ct_A - ct_B)^2 - (x_A - x_B)^2 = 36 - 1 = 35$$

Interwał czasoprzestrzenny jest rzeczywisty: $c\Delta t > \Delta x$

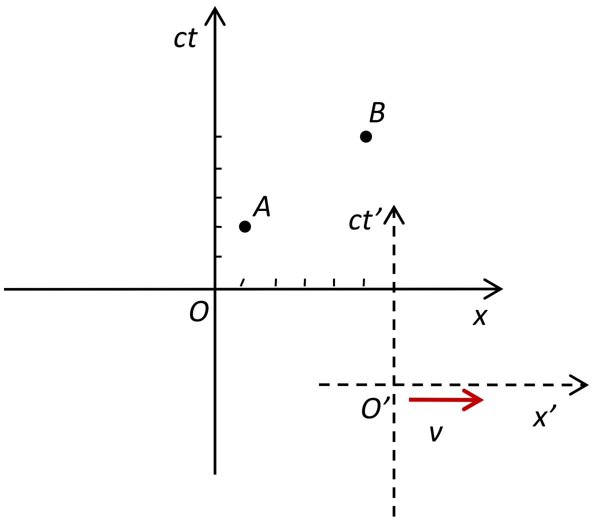
Oznacza to, że zdarzenia **mogą być powiązane przyczynowo** – zdarzenia są na tyle bliskie przestrzennie (małe Δx), że światło zdąży dotrzeć od zdarzenia A do B w czasie Δt

Zadanie 5

Zdarzenie *A* ma w układzie *O* współrzędne czasoprzestrzenne x_A, ct_A, zdarzenie *B* - współrzędne czasoprzestrzenne x_B, ct_B. Jaka jest ich kolejność czasowa w układzie współrzędnych *O'* poruszającym się wzdłuż osi *x* z prędkością v = 0,8c? Wartości współrzędnych:

a) $x_A = 1$, $ct_A = 2$, $x_B = 5$, $ct_B = 5$,

b) $x_A = 2$, $ct_A = 0$, $x_B = 3$, $ct_B = 6$



Aby zbadać, jaka jest ich kolejność czasowa w układzie O', należy znaleźć współrzędne czasowe zdarzeń w tym układzie (wykonać transformację Lorentza)

$$x' = \frac{x - \beta(ct)}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{gdzie} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Rozwiązanie a)

$$ct'_A = \frac{2 - 0{,}8 \cdot 1}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = \frac{1{,}2}{0{,}6} = 2$$

$$ct'_B = \frac{5 - 0{,}8 \cdot 5}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = \frac{1}{0{,}6} = 1{,}6667$$

O ile w układzie O najpierw zaszło zdarzenie A, a potem B ($ct_A < ct_B$), to w układzie O' kolejność zdarzeń jest odwrotna ($ct'_A > ct'_B$).

Rozwiązanie b)

Współrzędne zdarzeń w układzie O' wynoszą:

$$ct'_A = \frac{0 - 0{,}8 \cdot 2}{\sqrt{1 - 0{,}8^2}} = \frac{-1{,}6}{0{,}6} = 2{,}667$$

$$ct'_B = \frac{6 - 0{,}8 \cdot 3}{\sqrt{1 - 0{,}8^2}} = \frac{3{,}6}{0{,}6} = 6$$

Kolejność zdarzeń w układzie O i w układzie O' jest jednakowa: najpierw zaszło zdarzenie A, a potem B

($ct_A < ct_B$) i ($ct'_A < ct'_B$).

Zadanie 6

Zdarzenie *A* ma w układzie *O* współrzędne czasoprzestrzenne x_A, ct_A, zdarzenie *B* - współrzędne czasoprzestrzenne x_B, ct_B. Z jaką prędkością porusza się układ *O'*, w którym zdarzenia zajdą jednocześnie? Jaki warunek musi spełniać prędkość układu *O'*, aby kolejność zdarzeń była odwrócona? Wartości współrzędnych:

a) $x_A = 1$, $ct_A = 2$, $x_B = 5$, $ct_B = 5$,

b) $x_A = 2$, $ct_A = 0$, $x_B = 3$, $ct_B = 6$

Rozwiązanie a)

Aby znaleźć prędkość takiego układu, w którym zdarzenia są równoczesne, należy przyrównać wyrażenia na współrzędne czasowe w układzie poruszającym się z szukaną prędkością u.

$$ct'_A = ct'_B$$

$$\frac{ct_A - \beta x_A}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{ct_B - \beta x_B}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{gdzie} \quad \beta = \frac{u}{c}$$

$$ct_A - ct_B = \beta(x_A - x_B) \rightarrow \beta = \frac{ct_A - ct_B}{(x_A - x_B)} = \frac{-3}{-4} = 0{,}75$$

czyli u = 0,75c (dodatni znak prędkości oznacza, prędkość u skierowana jest zgodnie z osią x)

Kolejność zdarzeń będzie odwrócona w układzie poruszającym się z prędkością u, w którym zachodzi nierówność:

$$ct'_A > ct'_B$$

$$\frac{ct_A - \beta x_A}{\sqrt{1-\beta^2}} > \frac{ct_B - \beta x_B}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$ct_A - ct_B > \beta(x_A - x_B)$ wstawiamy dane liczbowe i otrzymujemy: $-3 > -4\beta \rightarrow \beta > 0{,}75$

Odp.: Układ, w którym zdarzenia *A* i *B* są równoczesne porusza się w kierunku dodatnim osi *x* z prędkością u = 0,75c, jeśli prędkość układu będzie większa niż 0,75c, to kolejność zdarzeń będzie odwrócona.

Rozwiązanie b)

Czy istnieje układ, w którym zdarzenia są równoczesne? Spróbujmy znaleźć prędkość takiego układu *u*.

$$ct_A - ct_B = \beta(x_A - x_B) \rightarrow \beta = \frac{ct_A - ct_B}{(x_A - x_B)} = \frac{-6}{-1} = 6$$

Kolejność zdarzeń byłaby odwrócona w układzie poruszającym się z prędkością u, w którym zachodzi nierówność:

$$ct'_A > ct'_B$$

Prowadzi to to nierówności: $\beta > 6$

Otrzymaliśmy absurdalny wynik, ponieważ prędkość układu nie może być większa od prędkości światła.

Musi być spełniona nierówność: $\beta < 1$

Odp.: Nie ma takiego układu, w którym zdarzenia są równoczesne, jak również w żadnym układzie nie zachodzą w odwrotnej kolejności. Jest to słuszne dla każdych dwóch zdarzeń, które mogą być powiązane przyczynowo

Uwalnia nas to od dylematów filozoficznych, gdybyśmy mogli w jakimś układzie obserwować najpierw skutek (np. narodziny syna), a potem przyczynę (narodziny jego ojca).

Zadanie 7

Zdarzenie *A* ma w układzie *O* współrzędne czasoprzestrzenne x_A, ct_A, zdarzenie *B* - współrzędne czasoprzestrzenne x_B, ct_B. Z jaką prędkością porusza się układ *O'*, w którym zdarzenia zajdą w tym samym miejscu? Wartości współrzędnych:

a) $x_A = 1$, $ct_A = 2$, $x_B = 5$, $ct_B = 5$,

b) $x_A = 2$, $ct_A = 0$, $x_B = 3$, $ct_B = 6$

Rozwiązanie a)

Aby znaleźć prędkość takiego układu, w którym zdarzenia zajdą w tym samym miejscu, należy przyrównać wyrażenia na współrzędne przestrzenne w układzie poruszającym się z szukaną prędkością u'.

$$x'_A = x'_B$$

$$\frac{x_A - \beta ct_A}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_B - \beta ct_B}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{gdzie} \quad \beta = \frac{u}{c}$$

$$x_A - x_B = \beta(ct_A - ct_B) \rightarrow \beta = \frac{(x_A - x_B)}{(ct_A - ct_B)} = \frac{-4}{-3} = 1{,}333$$

Nie istnieje układ, w którym zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu, nie mogą więc być powiązane przyczynowo.

Żaden układ nie może poruszać się z prędkością większą od prędkości światła. Wynika z tego, że nie ma takiego układu, w którym zdarzenia A i B zajdą w tym samym miejscu.

Rozwiązanie b)

$$x'_A = x'_B$$

$$x_A - x_B = \beta(ct_A - ct_B) \rightarrow \beta = \frac{(x_A - x_B)}{(ct_A - ct_B)} = \frac{-1}{-6} = 0{,}667$$

Istnieje układ, w którym zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu, mogą więc być powiązane przyczynowo.

Odp.: Układ, w którym zdarzenia *A* i *B* zajdą w tym samym miejscu porusza się w kierunku dodatnim osi *x* z prędkością u = 0,667c.

Zadanie 8

Na nieruchomą cząstkę o masie spoczynkowej m_0 zaczyna działać stała siła *F*. Po jakim czasie energia kinetyczna cząstki w laboratoryjnym układzie odniesienia stanie się *k* razy większa od energii spoczynkowej cząstki. Ile razy wzrośnie w tym czasie masa cząstki? Jaką drogę przebędzie cząstka w tym czasie w układzie laboratoryjnym?

Rozwiązanie

$$\left.\begin{aligned} &\text{Energia początkowa:} \quad E_1 = m_0 c^2 \\ &\text{Energia końcowa:} \quad E_2 = m_0 c^2 + k m_0 c^2 = (k+1) m_0 c^2 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad\; E_2 = m_2 c^2 \end{aligned}\right\} \qquad m_2 = (k+1) m_0$$

Z wyrażenia na masę końcową m_2 obliczamy prędkość końcową v:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = (k+1) m_0 \rightarrow v = c\,\frac{\sqrt{k(k+2)}}{k+1}$$

Z II zasady dynamiki:

$$\frac{dp}{dt} = F \qquad dp = Fdt \qquad \int_{p_1}^{p_2} dp = \int_0^t Fdt \rightarrow p_2 = Ft$$

$$p_2 = m_2 v = (k+1) m_0 c \frac{\sqrt{k(k+2)}}{k+1}$$

$$(k+1) m_0 c \frac{\sqrt{k(k+2)}}{k+1} = Ft \rightarrow t = \frac{m_0 c}{F} \sqrt{k(k+2)}$$

szukany czas

Aby obliczyć drogę przebytą x_L przez cząstkę w układzie laboratoryjnym, przyrównujemy pracę wykonaną przez siłę do nabytej przez cząstkę energii kinetycznej.

$$F x_L = k m_0 c^2 \rightarrow x_L = \frac{k m_0 c^2}{F}$$

Odp.: masa cząstki wzrośnie k+1 razy w czasie $t = \frac{m_0 c}{F} \sqrt{k(k+2)}$, w układzie laboratoryjnym cząstka przebędzie drogę $x_L = \frac{k m_0 c^2}{F}$

Zadanie 9

Cząstka o masie spoczynkowej m_0 i pędzie $p_1 = km_0c$ zderza się z identyczną cząstką o pędzie $p_2 = m_0c$. Obie cząstki poruszają się wzdłuż jednej prostej. Obliczyć masę spoczynkową M_0 i prędkość u powstałej w wyniku zderzenia cząstki złożonej.

Rozwiązanie

Z prawa zachowania pędu: $$km_0c \pm m_0c = \frac{M_0u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

plus – prędkości cząstek mają jednakowe zwroty,

minus - prędkości cząstek mają przeciwne zwroty

Z prawa zachowania energii: $$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{M_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\frac{m_0v_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} = km_0c \to v_1 = c\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$\frac{m_0v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = m_0c \to v_2 = c\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$E_1 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} = m_0 c^2 \sqrt{k^2+1}$$

$$E_2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = m_0 c^2 \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} m_0 c(k \pm 1) = \dfrac{M_0 u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ m_0 c^2\left(\sqrt{k^2+1}+\sqrt{2}\right) = \dfrac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Dzielimy równania stronami

$$u = \frac{c(k \pm 1)}{\sqrt{k^2+1}+\sqrt{2}}$$

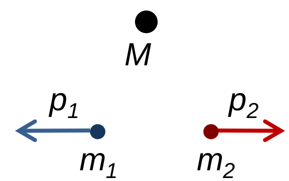
$$M_0 = m_0\left(\sqrt{k^2+1}+\sqrt{2}\right)\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$M_0 = m_0 \sqrt{2\sqrt{2\left(k^2+1\right)}+2 \mp 2k}$$

Zadanie 10

Spoczywająca cząstka o masie spoczynkowej M rozpada się na dwie cząstki o masach spoczynkowych m_1 *i* m_2.

Wyznaczyć energie kinetyczne powstałych cząstek E_1 *i* E_2.



Rozwiązanie

prawo zachowania pędu: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| \qquad (1)$$

prawo zachowania energii: $\left(m_1c^2 + E_1\right) + \left(m_2c^2 + E_2\right) = Mc^2 \qquad (2)$

Pęd cząstki należy wyrazić przez jego energię kinetyczną $E = p^2c^2 + \left(m_0c^2\right)^2$

$$p^2c^2 = E^2 - m_0^2c^4 = \left(m_0c^2 + E_k\right)^2 - m_0^2c^4$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_k^2 - 2E_km_0c^2}$$

równanie (1) i (2) tworzą układ równań z 2 niewiadomymi

$$\begin{cases} \sqrt{E_1^2 - 2E_1m_1c^2} = \sqrt{E_2^2 - 2E_2m_2c^2} \\ \left(m_1c^2 + E_1\right) + \left(m_2c^2 + E_2\right) = Mc^2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$E_1 = \frac{M^2c^2 + m_1^2c^2 - m_2^2c^2 - 2m_1Mc^2}{2M}$$

$$E_2 = \frac{M^2c^2 + m_2^2c^2 - m_1^2c^2 - 2m_2Mc^2}{2M}$$

Zadanie 11

Wyprowadzić wzór na dylatację czasu:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Rozwiązanie:

Na początku trzeba zdecydować, czy zostanie użyta prosta czy odwrotna transformacja Lorentza. Oba podejścia nie są w tym przypadku symetryczne i tylko jedno z nich umożliwia uzyskanie prostego wyniku. Chodzi mianowicie o to, żeby końcowy rezultat zawierał tylko interwały czasowe oraz relatywistyczny czynnik zawarty pod pierwiastkiem. W tym przypadku skorzystamy z transformacji odwrotnej, wiążącej współrzędne układu spoczywającego ze współrzędnymi układu poruszającego się:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Jeśli teraz chcemy obliczyć czas, jaki upłynął w układzie spoczywającym, pomiędzy chwilami t_1 i t_2, to otrzymamy:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2{}' + \frac{v}{c^2} x_2{}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1{}' + \frac{v}{c^2} x_1{}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

W tym momencie trzeba poczynić ważną uwagę: $x_1{}'$ oraz $x_2{}'$ odpowiadają pomiarowi przeprowadzonemu przez obserwatora poruszającego się. Jeżeli chcemy, aby mierzył on swój czas własny, jaki mu upłynął, to musi on dokonać pomiaru jednym i tym samym zegarem (zarówno $t_1{}'$ jak i $t_2{}'$). Zegar ten spoczywa w jego własnym układzie, stąd wniosek, że $x_1{}' = x_2{}'$. Jeśli różnicę $t_2{}'$ i $t_1{}'$ oznaczymy jako $\Delta t'$, to otrzymamy:

$$\Delta t = \frac{t_2' - t_1{}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Zadanie 12

Wyprowadzić wzór na relatywistyczne dodawanie prędkości, przyjmując, że prędkość układu poruszającego się względem układu spoczywającego wynosi *u*.

Rozwiązanie:

Jeśli w układzie będącym w ruchu, ciało ma prędkość *v'*, to jego prędkość w układzie spoczywającym będzie wynosić:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Następnie trzeba skorzystać z odwrotnej transformacji Lorentza, żeby wyrazić współrzędne w układzie spoczywającym, przez współrzędne w układzie poruszającym się:

$$v = \frac{\dfrac{x_2{}' + ut_2{}'}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} - \dfrac{x_1{}' + ut_1{}'}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}}{\dfrac{t_2' + \dfrac{u}{c^2}x_2{}'}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} - \dfrac{t_1' + \dfrac{u}{c^2}x_1{}'}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}} = \frac{(x_2' - x_1{}') + u(t_2' - t_1{}')}{(t_2' - t_1{}') + \dfrac{u}{c^2}(x_2' - x_1{}')}$$

$$= \frac{\Delta x' + u\Delta t'}{\Delta t' + \dfrac{u}{c^2}\Delta x'}$$

Dokonując kolejnych przekształceń oraz pamiętając, że $v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$ otrzymujemy:

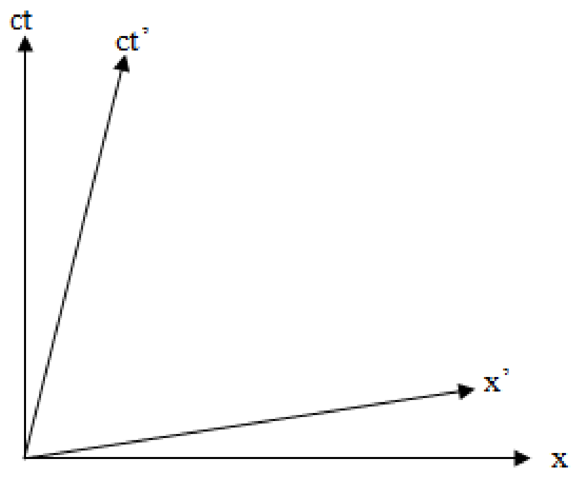
$$v = \frac{\Delta t'\left(\dfrac{\Delta x'}{\Delta t'} + u\right)}{\Delta t'\left(1 + \dfrac{u}{c^2}\dfrac{\Delta x'}{\Delta t'}\right)} = \frac{v' + u}{1 + \dfrac{uv'}{c^2}}$$

Zadanie 13

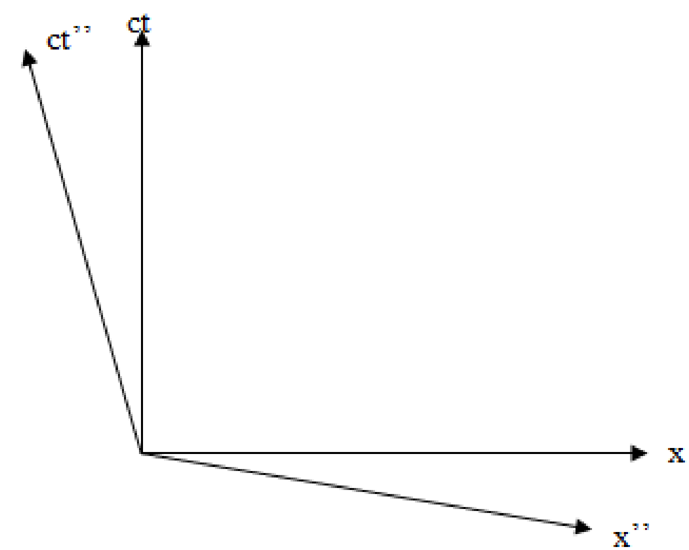
Rozwiązać paradoks bliźniąt. Było dwóch bliźniaków: Piotr i Paweł. Zaraz po urodzeniu Paweł wybrał się w długą podróż kosmiczną rakietą, poruszającą się z prędkością bliską prędkości światła. Zgodnie z wnioskami płynącymi ze szczególnej teorii względności, Pawłowi czas powinien płynąć wolniej, zatem po powrocie na Ziemię będzie on młodszy od swojego brata. Jednak z punktu widzenia Pawła, siedzącego w rakiecie, to on spoczywa, zaś jego brat – Piotr, porusza się względem niego z prędkością bliską prędkości światła, zatem to Piotrowi powinien wolniej płynąć czas i to on podczas spotkania powinien być młodszy. Jak rozwikłać ten paradoks?

Rozwiązanie:

Cały paradoks daje się rozwiązać, jeśli się narysuje odpowiednie układy odniesienia. Jak wiadomo, osie układu poruszającego się są pochylone względem osi układu spoczywającego pod kątem proporcjonalnym do prędkości układu będącego w ruchu. Dla układu poruszającego się z prędkością niewielką w porównaniu z prędkością światła, osie tego układu z punktu widzenia obserwatora spoczywającego, będą wyglądały następująco:

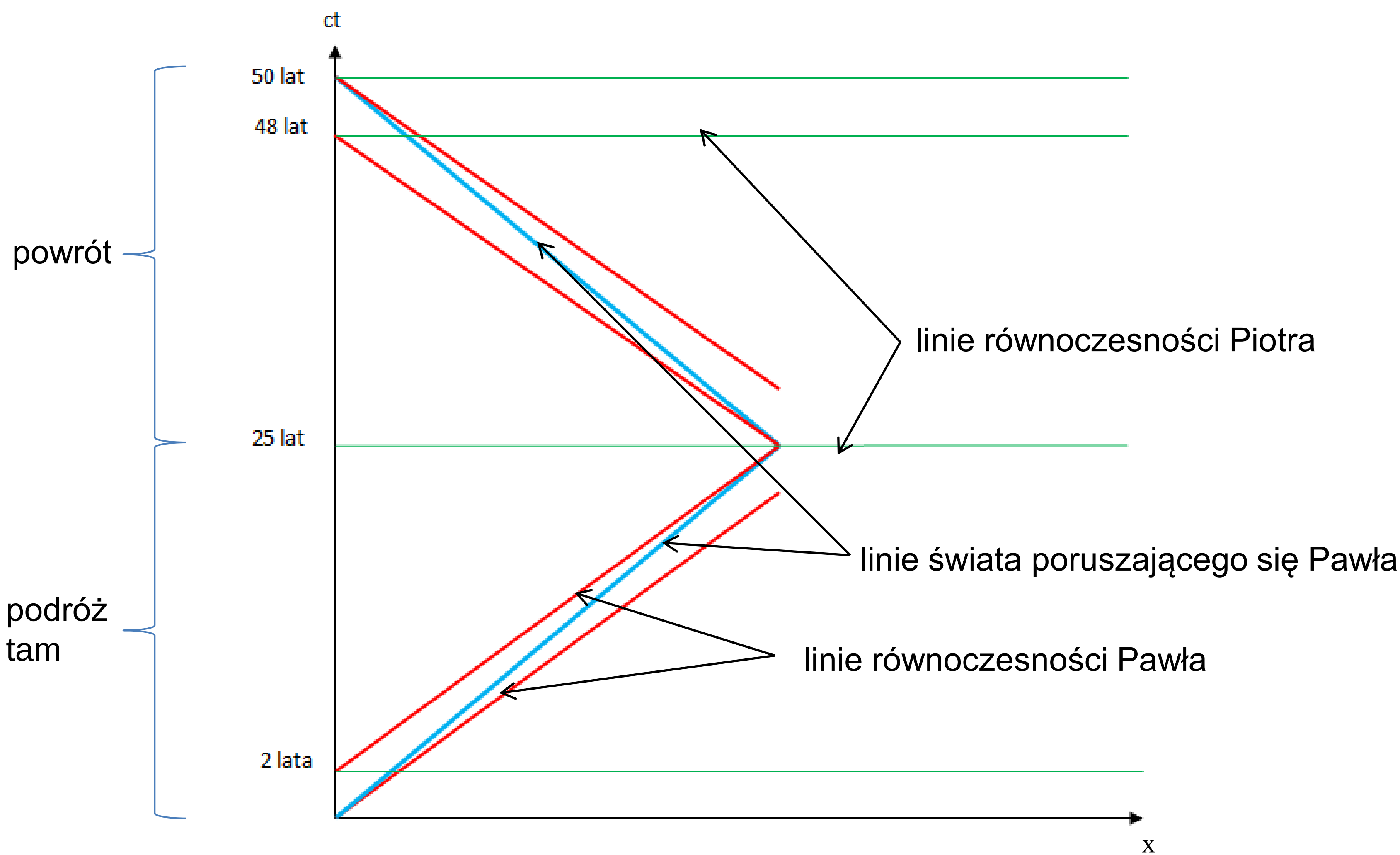


układ poruszający się w dodatnią stronę osi x



układ poruszający się w ujemną stronę osi x

Układem poruszającym się jest tu oczywiście układ „primowany” (patrz wykres na kolejnej stronie). Im większa prędkość tego układu, tym bardziej osie *x’* oraz *ct’* będą się do siebie zbliżały. Jak wiadomo Paweł porusza się z prędkością bliską prędkości światła, a zatem jego odpowiednie osie będą nachylone pod bardzo dużym kątem, bliskim 45^0 do osi układu Piotra. Oś *x’*, jest zarazem osią równoczesności dla Pawła, zaś jego oś *ct’*, jest linią świata jego ruchu, widzianego z punktu widzenia Piotra. W momencie, gdy Piotr ma 25 lat, Paweł postanawia zawrócić w kierunku Ziemi. Zmienia wtedy układ odniesienia na układ „bis”. Jego osie, a zatem i linia równoczesności oraz linia świata w układzie Piotra, będą nachylone pod ujemnymi kątami. Na poglądowym rysunku kolorem zielonym zostały zaznaczone linie równoczesności spoczywającego Piotra i przy każdej z tych linii zaznaczono, ile miał on lat w chwili tego zdarzenia. Kolorem niebieskim zaznaczone są linie świata poruszającego się Pawła, z punktu widzenia Piotra (są to odpowiednio osie *ct’* i *ct”*). Kolorem czerwonym zaś zaznaczone są linie równoczesności Pawła. Jak widać prawa szczególnej teorii względności nie zostały złamane. Pawłowi rzeczywiście czas płynie zdecydowanie wolniej aż do momentu decyzji o powrocie. Piotr widzi, że podczas gdy on sam postarzał się o 25 lat, jego brat postarzał się powiedzmy o ok. 7 lat. Obserwacje Pawła będą również zgodne z teorią względności. Widzi on, że w momencie decyzji o powrocie, zdążył postarzeć się o 7 lat, podczas gdy Piotr od chwili rozstania postarzał się zaledwie o 2 lata (czerwona linia równoczesności). Zatem z jego punktu widzenia, to Piotrowi na Ziemi czas płynie wolniej, bo to on porusza się względem Pawła. Analogicznie sytuacja przebiega w czasie powrotu na Ziemię. Znów każdy z nich prowadzi swoje własne obserwacje, sprzeczne z obserwacjami brata. Kluczowy dla rozwiązania tego paradoksu jest punkt, w którym Paweł zawraca swoją rakietę. Momentalnie zmienia on układ odniesienia, zmienia linię równoczesności z linii odpowiadającej 2 latom Piotra na linię odpowiadającą 48 latom Piotra. A zatem momentalnie Piotr z punktu widzenia Pawła postarzał się o 46 lat! Paweł popełnił bardzo gruby błąd, pomijając w swoich obserwacjach obszar na wykresie, leżący pomiędzy liniami równoczesności odpowiadającymi 2 latom i 48 latom. Uwzględniając zatem ten efekt, rzeczywiście Paweł postarzeje się o 7 lat, podróżując w jedną stronę, o kolejne 7, podróżując w drugą stronę, czyli w sumie w trakcie spotkania będzie on 14-letnim chłopcem, podczas gdy Piotr będzie 50-letnim mężczyzną.

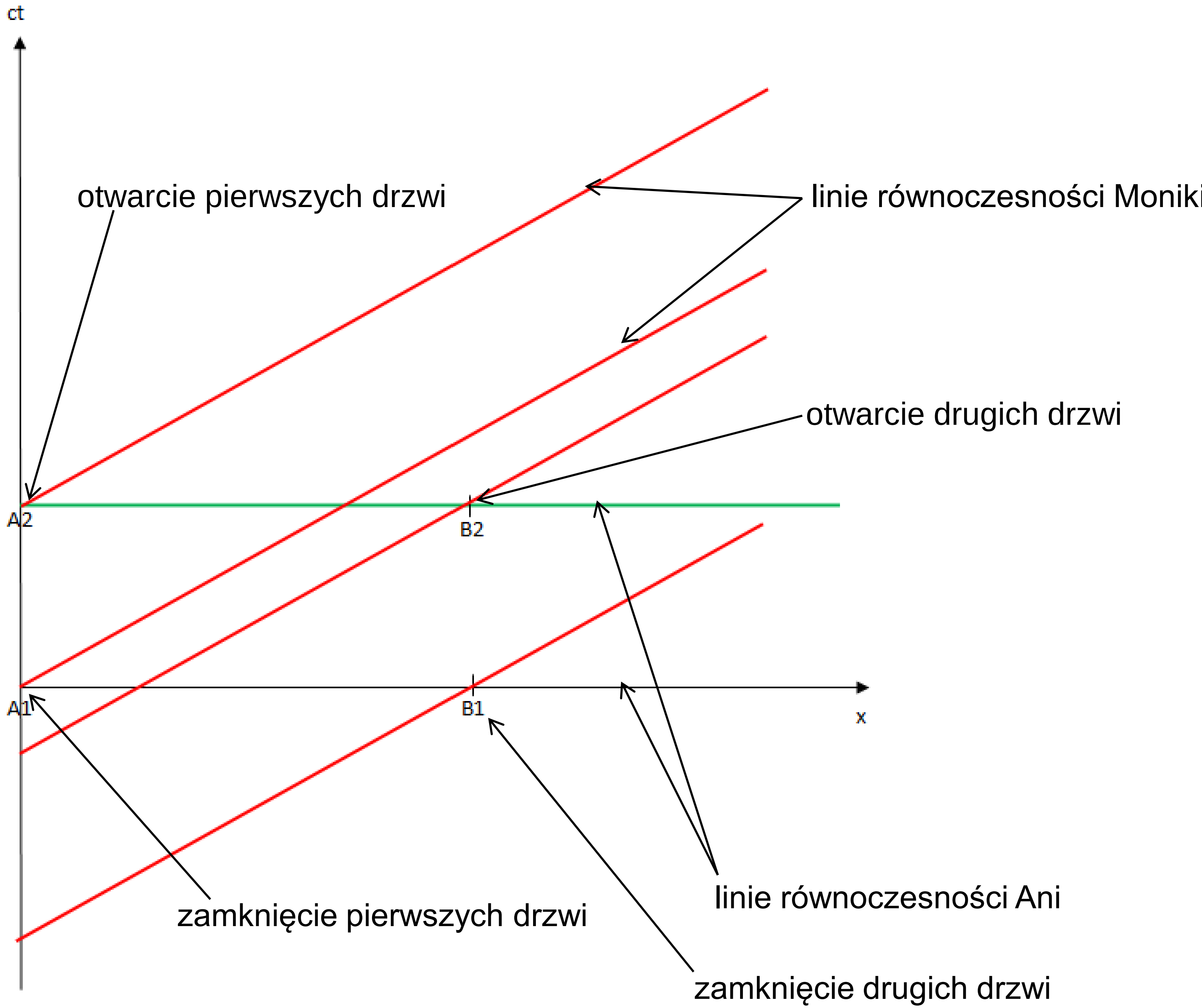

ct
50 lat
48 lat
25 lat
2 lata
x
powrót
podróż
tam
linie równoczesności Piotra
linie świata poruszającego się Pawła
linie równoczesności Pawła

Zadanie 14

Rozwiązać paradoks tyczki i stodoły. Są dwie tyczkarki: Monika i Ania. Monika postanowiła pobić rekord świata w skoku o tyczce, ale potrzebuje do tego bardzo długiego rozbiegu, który biegnie przez stodołę. Stodoła posiada automatycznie zamykane drzwi na początku i na końcu. Ania postanowiła, że za wszelką cenę uniemożliwi Monice pobicie rekordu i zamknie równocześnie przednie i tylne drzwi od stodoły w momencie, gdy Monika będzie przez tą stodołę przebiegać. Jednak z punktu widzenia Ani tyczka ulegnie skróceniu, gdy Monika będzie biegła z bardzo dużą prędkością i może się zdarzyć, że tyczka skróci się na tyle, że przednie i tylne drzwi stodoły zamkną się równocześnie, a po chwili otworzą się równocześnie, nie uszkadzając tyczki. Z kolei z punktu widzenia biegnącej Moniki, to stodoła przybliża się ku niej, a zatem ulegnie skróceniu i może stać się krótsza od tyczki. Zatem zamykające się drzwi (nawet na bardzo krótką chwilę) mogą uszkodzić tyczkę. Jak zatem pogodzić to, co będzie widzieć Monika z tym, co będzie widzieć Ania?

Rozwiązanie:

Pozorny spór obu tyczkarek wynika z braku zrozumienia krachu równoczesności w szczególnej teorii względności. Trzeba narysować diagram czasoprzestrzenny (patrz kolejna strona) spoczywającej Ani, z jej liniami równoczesności (oś x oraz linia zielona) oraz z liniami równoczesności biegnącej Moniki (czerwone linie). Na diagramie tym odpowiednie zdarzenia oznaczone są następująco: A1 – zamknięcie pierwszych drzwi stodoły, B1 – zamknięcie drugich drzwi, A2 – otwarcie pierwszych drzwi, B2 – otwarcie drugich drzwi. Zatem z punktu widzenia spoczywającej Ani drzwi pierwsze i drugie zamkną się w tej samej chwili, a po pewnej chwili również równocześnie się otworzą. Jeśli tyczka jest odpowiednio krótka, w wyniku relatywistycznego skrócenia, to chwilowe zamknięcie obu par drzwi nie spowoduje uszkodzenia tyczki w momencie, gdy ta znajduje się wewnątrz stodoły. Ania słusznie będzie twierdzić, że wbrew swoim oczekiwaniom, nie udało jej się uszkodzić tyczki Moniki.


ct
otwarcie pierwszych drzwi
linie równoczesności Moniki
otwarcie drugich drzwi
A2
B2
A1
B1
x
linie równoczesności Ani
zamknięcie pierwszych drzwi
zamknięcie drugich drzwi

Z punktu widzenia Moniki, to rzeczywiście stodoła ulegnie relatywistycznemu skróceniu i stanie się krótsza od tyczki, jednak zdarzenia nie będą już równoczesne, jeśli przyjrzymy się czerwonym liniom równoczesności Moniki, narysowanym na diagramie czasoprzestrzennym. Pierwsza linia równoczesności Moniki przebiega przez zdarzenie B1, a więc zamknięcie drugich drzwi stodoły . Następnie mamy zdarzenie B2, czyli otwarcie drugich drzwi stodoły. W międzyczasie Monika wbiega do środka ze swoją długą (w porównaniu ze stodołą) tyczką. Kolejna linia równoczesności przebiega przez A1, czyli zamknięcie pierwszych drzwi (ale Monika zdążyła już dawno je minąć) i wreszcie następuje A2, czyli otwarcie pierwszych drzwi. Bardzo duża prędkość Moniki spowodowała, że jej linie równoczesności są nachylone pod takimi kątami, że możliwe jest dla niej minięcie stodoły bez ryzyka uszkodzenia tyczki. Każda z obu tyczkarek zaobserwuje te same zdarzenia w innych momentach i to, co dla Ani było równoczesne (zamknięcie obu par drzwi a następnie otwarcie obu par drzwi), dla Moniki nie będzie już równoczesne. Zachodzi tu krach równoczesności, spowodowany transformacją współrzędnych czasowych z jednego układu, do drugiego układu. Zatem obie panie zgodzą się co do wyniku obserwacji, że tyczka nie została w żaden sposób uszkodzona.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1

Cząstka o masie spoczynkowej m_0 i prędkości $v_1 = \frac{4}{5}c$ dogania identyczną cząstką poruszającą się z prędkością $v_1 = \frac{3}{5}c$. Obliczyć masę spoczynkową M_0 i prędkość u powstałej w wyniku zderzenia cząstki złożonej.

Odp: $u = \frac{5}{7}c$ $\qquad M_0 = \frac{5\sqrt{6}}{6} m_0 \cong 2{,}04 m_0$

Zadanie 2

Cząstka o masie spoczynkowej m_0 i energii kinetycznej E_1 zderza się z nieruchomą cząstką o tej samej masie spoczynkowej. Obliczyć masę spoczynkową M_0 i prędkość u powstałej w wyniku zderzenia cząstki złożonej.

Odp: $u = c\sqrt{\frac{E_1}{E_1 + 2m_0c^2}}$ $\qquad M_0 = \frac{1}{c}\sqrt{2m_0\left(E_1 + 2m_0c^2\right)}$

Zadanie 3

Na poruszającą się cząstkę o masie spoczynkowej m_0 zaczyna działać stała siła F. Po jakim czasie masa cząstki wzrośnie od $2m_0$ do $4m_0$ Ile razy wzrośnie w tym czasie masa cząstki? Jaką drogę przebędzie cząstka w tym czasie w układzie laboratoryjnym?

Odp: $t = \frac{m_0 c}{F}\left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right)$ $\qquad S = \frac{2m_0 c}{F}$

Zadanie 4

Znaleźć własny czas życia cząstki, jeśli porusza się ona z prędkością $v = 0{,}97c$ i do momentu rozpadu przebyła odległość 20 km.

Odp: $\tau = 8{,}35 \cdot 10^{-6} s$

Zadanie 5

Znaleźć układ odniesienia, w którym chrzest Polski i bitwa pod Grunwaldem odbyły się

a) w tym samym miejscu,

b) w tym samym czasie.

c) Czy te zdarzenia mogą być w związku przyczynowo-skutkowym?

Przyjąć, że w układzie Ziemi odległość między Gnieznem a Grunwaldem wynosi 200 km, a czas między tymi wydarzeniami wynosi 400 lat.

Odp: a) układ poruszający się od Gniezna do Grunwaldu z prędkością $v = 1{,}59 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s}$

b) taki układ nie istnieje

c) tak

Zadanie 6

Sprawdzić, czy zdarzenia A i B mogą być powiązane przyczynowo. Z jaką prędkością porusza się układ *O’*, w którym zdarzenia zajdą jednocześnie? Jaki warunek musi spełniać prędkość układu *O’*, aby kolejność zdarzeń była odwrócona? Wartości współrzędnych:

a) $x_A = 4$, $ct_A = 2$, $x_B = 6$, $ct_B = 3$, b) $x_A = 5$, $ct_A = 3$, $x_B = 1$, $ct_B = 0$

Odp: a) zdarzenia zajdą jednocześnie w układzie poruszającym z prędkością, $v = 0{,}5c$, kolejność zdarzeń będzie odwrócona w układzie poruszającym z prędkością, $v > 0{,}5c$

b) taki układ nie istnieje

Zadanie 7

Pręt o masie spoczynkowej m_0 porusza się z taką prędkością, że jego długość obserwowana w układzie laboratorium jest dwa razy krótsza niż zmierzona wtedy, gdy pręt jest w spoczynku. Oblicz energię kinetyczną i prędkość pręta oraz jego pęd.

Odp: $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ $E_k = m_0 c^2$ $p = \sqrt{3} m_0 c$

Zadanie 8

Mezon porusza się z energią całkowitą $E = 10\,Gev$. Jego energia spoczynkowa wynosi $m_0 c^2 = 200MeV$, a własny czas życia równy jest $\tau = 10^{-6} s$ Oblicz:

a) Czas życia w laboratorium

b) Pęd

c) Energię kinetyczną

Odp: $t = 2 \cdot 10^{-4} s$ $p = 9{,}999979 \frac{GeV}{c}$ $E_k = 9{,}8 GeV$

Zadanie 9

Ze statku kosmicznego poruszającego się względem Ziemi z prędkością $v = 0{,}6c$ wystrzelono w kierunku ruchu pocisk z prędkością $v = 0{,}8c$. Z jaką prędkością *u* porusza się pocisk względem Ziemi? Jakie wymiary pocisku widzi obserwator na Ziemi, jeśli w układzie własnym pocisk jest kulą o średnicy d = 10 cm?

Odp: $u = 0{,}946c$ Pocisk ma kształt spłaszczonej kuli o grubości 3,2 cm.

Zadanie 10

W układzie współrzędnych *x - ct* zdarzenia mają współrzędne A (2,1), B (7,2), C (6,7), D (2,7). Na diagramie Minkowskiego zakreślić obszary, których przyczyną może być:

a) zdarzenie B, przy czym przyczyną nie może być zdarzenie A,
b) zdarzenie A lub B, przy czym przyczyną nie może być zdarzenie C,
c) zdarzenie A, przy czym przyczyną nie może być zdarzenie C i D,
d) zdarzenie D i B, przy czym przyczyną nie może być zdarzenie A.

Zadanie 11

Wyprowadzić wzór na skrócenie Lorentza:

$$l = \frac{l_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

przy czym l_0 jest długością własną pręta spoczywającego w układzie poruszającym się z prędkością v, zaś l jest długością mierzoną przez obserwatora spoczywającego na Ziemi.

Wskazówka:

W tym przypadku trzeba skorzystać z prostej transformacji Lorentza, tak aby wyrazić współrzędne położenia pręta w układzie poruszającym się poprzez współrzędne czasowe i przestrzenne pręta w układzie spoczywającym. Jeśli się zauważy, że pomiar długości pręta (czyli jego początku i końca) w układzie spoczywającym musi odbywać się w tym samym momencie, to podobnie jak w zadaniu z dylatacją czasu, współrzędne czasowe ulegną skróceniu.

Zadanie 12

Długość pręta spoczywającego w samolocie lecącym z prędkością $v = \frac{2\sqrt{2}}{3}c$ wynosi l_0.

Korzystając ze wzoru na kontrakcję długości znaleźć jego długość z punktu obserwatora spoczywającego na ziemi.

Odp. $l = \frac{1}{3} l_0$

Zadanie 13

Względem układu *O* porusza się ze stałą prędkością *v* wzdłuż osi *x* układ *O'*. W układzie *O'* znajduje się pręt o długości l_0, tworzący kąt φ' z osią x'. Jaką długość pręta i jaki kąt zmierzy obserwator *O*?

Odp.

$$tg\varphi = \frac{tg\varphi'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} (\cos\varphi')^2}$$

Zadanie 14
Pręt o długości l_0 spoczywa w układzie *O"*. Układ *O"* porusza się z pewną prędkością względem układu *O'*, w którym zmierzona długość pręta wynosi *l'*. Układ *O"* porusza się także z pewną prędkością względem układu *O* (większą niż względna prędkość *O"* i *O'*), w którym zmierzona długość pręta wynosi *l*. Obliczyć względną prędkość układów *O'* i *O*. Układy O' i O'' poruszają się w tym samym kierunku.

Odp.

$$v = \frac{u-w}{1-\frac{wu}{c^2}} = \frac{c\left[\sqrt{1-\left(\frac{l}{l_0}\right)^2} - \sqrt{1-\left(\frac{l'}{l_0}\right)^2}\right]}{1-\sqrt{1-\left(\frac{l}{l_0}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{l'}{l_0}\right)^2}}$$

v – prędkość względna *O'* i *O*, *w* – prędkość względna układów *O"* i *O'*, *u* – prędkość względna układów *O"* i *O*

Zadanie 15
Akcelerator liniowy przyspiesza elektrony do takich prędkości, dla których

$$1-\frac{v^2}{c^2} \approx 10^{-10}$$

Kanał akceleratora ma długość 3000 m. Obliczyć, jaką długość kanału przyspieszającego zmierzy obserwator związany z pędzącymi elektronami, gdy zakończył się już proces przyspieszania.

Odp. $l \approx 0{,}04\, m$

Zadanie 16

Dwie wiązki elektronów wylatują z akceleratora z prędkością 0,9c. Wiązki te skierowano przeciwbieżnie. Obliczyć prędkość względną elektronów z punktu odniesienia jednej z wiązek.

Odp. $v_w \approx 0{,}994c$