PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Fizyka Jądrowa cz. 2

Zadania z rozwiązaniami

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

a) Oszacuj gęstość nukleonu? Wynik wyraź w kg/cm^3.
b) Porównaj gęstość materii jądrowej dla dwóch jąder: ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ oraz ${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$

Masa protonu
$m_p = 1{,}672649 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Masa neutronu
$m_p = 1{,}674954 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Rozwiązanie

a) Do obliczeń przyjmijmy masę nukleonu równą $1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
W przybliżeniu: ***m*** **= 10^{-27} kg**

Rozmiar nukleonu jest rzędu **10^{-15} m = 10^{-13} cm**
Objętość jest więc rzędu: (**10^{-13} cm)^3 = 10^{-39} cm^3**

Gęstość wynosi:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{10^{-27}\,\mathrm{kg}}{10^{-39}\,\mathrm{cm}^3} = 10^{12}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^3}$$

b) Promień sferycznego jądra można wyrazić przez liczbę nukleonów $R = r_0 A^{1/3}$

gdzie $r_0 = 1{,}2\,\mathrm{fm} = 1{,}2 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{cm}$

Masa jądra: $M = Z \cdot m_p + (A - Z)m_n$

Objętość: $V = 4/3\,\pi R^3 = 4/3\,\pi r_0^3 A$

Gęstość: $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{Z \cdot m_p + (A - Z)m_n}{4/3\,\pi r_0^3 A}$

Gęstość materii jądrowej dla jądra węgla $^{12}_{6}\mathrm{C}$

$$\rho = \frac{6 \cdot m_p + 6m_n}{4/3\,\pi\, r_0^3 12} = \frac{6(m_p + m_n)}{16\pi\, r_0^3} = 2{,}31245 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^3}$$

Gęstość materii jądrowej dla jądra ołowiu $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$

$$\rho = \frac{82 \cdot m_p + 126m_n}{4/3\,\pi\, r_0^3 208} = 2{,}31278 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^3}$$

Gęstość materii jądrowej nie zależy od wielkości jądra.

Zadanie 2

Czas połowicznego rozpadu ^{239}Pu został wyznaczony przez zanurzenie próbki ^{239}Pu o masie $m = 120.1$ g w ciekłym azocie o objętości dostatecznie dużej, aby zatrzymać wszystkie cząstki α. Zmierzona masa wyparowanego azotu odpowiada wydzielonej mocy $P = 0.231$ W. Oblicz czas połowicznego rozpadu ^{239}Pu, przyjmując, że energia kinetyczna cząstki α emitowanej w rozpadzie wynosi 5.144 MeV. (Uwzględnij energię kinetyczną jądra powstałego podczas rozpadu).

1 MeV = $1.60206 \cdot 10^{-13}$ J
1 u = $1.66 \cdot 10^{-24}$ g

Rozwiązanie

$$^{239}Pu \rightarrow {}^{235}U + \alpha$$

Podczas rozpadu zachowany jest pęd. Wobec tego pędy cząstki α i jądra uranu są równe co do wartości i przeciwnie skierowane.

$$p_\alpha = p_U$$

Energia kinetyczna jądra uranu:

$$E_U = \frac{p_U^2}{2M_U} = \frac{p_\alpha^2}{2M_U}$$

Pęd cząstki α wyrażamy przez jej energię kinetyczną: $E_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2M_\alpha} \Rightarrow p_\alpha^2 = 2M_\alpha E_\alpha$

Otrzymujemy:

$$E_U = \frac{p_\alpha^2}{2M_U} = \frac{2M_\alpha E_\alpha}{2M_U} = \frac{4}{235} E_\alpha$$

Energia wyzwolona w jednym akcie rozpadu wynosi więc:

$$E = E_U + E_\alpha = \frac{239}{235} E_\alpha = 5.2316\,\mathrm{MeV} = 8.3813 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}$$

Moc P to pochodna wydzielonej energii W względem czasu:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d\left(E \cdot N\right)}{dt} = E\frac{dN}{dt}$$

Można stąd obliczyć szybkość rozpadów:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{P}{E} = \frac{0.231}{8.3813 \cdot 10^{-13}} = 2{,}756 \cdot 10^{11} s^{-1}$$

Z prawa rozpadu: $$N = N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{dN}{dt} = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} = -\lambda N = -\frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}} N$$

Masa próbki [g]

Liczba Avogadro

Liczba jąder w próbce: $$N = \frac{120{,}1}{239{,}05} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 3{,}025 \cdot 10^{23}$$

Masa 1 mola ^{239}Pu [g]

Czas połowicznego rozpadu: $$T_{\frac{1}{2}} = \frac{N \ln 2}{\frac{dN}{dt}} = \frac{3{,}025 \cdot 10^{23} \cdot \ln 2}{2.756 \cdot 10^{11}} = 7.609 \cdot 10^{11} s = 24112 \,\text{lat}$$

1rok = 365,25 dni = $31{,}5576 \cdot 10^6$ s

Rozwiązujemy układ równań:

$$E_{Po} = \frac{M_\alpha E_\alpha}{M_{Po}}$$

$$\Delta E = E_\alpha + \frac{M_\alpha E_\alpha}{M_{Po}}$$

$$E_\alpha = \frac{M_{Po} \Delta E}{M_\alpha + M_{Po}}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy wynik 5.49 MeV, czyli tylko o 0.1 MeV mniej niż całkowita energia rozpadu.

Sprawdzimy jeszcze, czy istotnie prędkość cząstki α jest znacząco mniejsza od prędkości światła:

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8.80 \cdot 10^{-13}}{6.65 \cdot 10^{-27}}} = 16.27 \cdot 10^6 \left[\sqrt{\frac{kgm^2}{s^2 kg}} = \frac{m}{s} \right]$$

Prędkość, aczkolwiek znaczna, stanowi 5.4% prędkości światła, zatem przyjęte uproszczenie jest uzasadnione.

Zadanie 3
Jądro o liczbach (A,Z) rozszczepia się na 2 fragmenty o równych masach. Korzystając z modelu kroplowego, oszacuj energię wydzieloną podczas takiego rozszczepienia jądra ^{238}U.

Rozwiązanie

Energia rozszczepienia E_f równa jest różnicy mas jądra początkowego i jąder końcowych wyrażonych w jednostkach energii

$$E_f = M(A,Z) - 2 \cdot M\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right)$$

Masa jądra to suma mas nukleonów pomniejszona o energię wiązania

$$M(A,Z) = Z \cdot M_p + (A-Z) \cdot M_n - B(A,Z)$$

W modelu kroplowym energia wiązania wyraża się wzorem:

energia symetrii

energia powierzchniowa

$$B(A,Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{SYM} \frac{(A-2Z)^2}{A} + \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

energia objętościowa

energia kulombowska

energia parowania

Stałe wyznaczone empirycznie wynoszą:

a_V = 15.85 MeV
a_S = 18.34 MeV
a_C = 0.71 MeV
a_{SYM} = 23.22 MeV
δ = 11.46 MeV dla jąder parzysto-parzystych
δ = 0 dla jąder parzysto-nieparzystych
δ = -11.46 MeV dla jąder nieparzysto-nieparzystych

Różnica mas jąder sprowadza się do różnicy energii wiązania jąder końcowych i jądra początkowego, ponieważ przed i po rozszczepieniu liczba protonów i neutronów jest taka sama

$$E_f = 2 \cdot B\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right) - B(A, Z)$$

Obliczmy różnice dla każdego składnika energii wiązania.

Energia objętościowa: $2a_V \cdot \frac{A}{2} - a_V \cdot A = 0$

Energia powierzchniowa: $-2a_S \cdot \left(\frac{A}{2}\right)^{2/3} + a_S \cdot A^{2/3} = a_S \cdot A^{2/3}\left(1 - 2^{1/3}\right)$

Energia kulombowska: $-2a_C \frac{\left(\frac{Z}{2}\right)^2}{\left(\frac{A}{2}\right)^{1/3}} + a_C \frac{(Z)^2}{A^{1/3}} = a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}\left(1 - 2^{-2/3}\right)$

Energia symetrii:

$$-2a_{SYM} \frac{\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2}{\frac{A}{2}} + a_{SYM} \frac{(A-2Z)^2}{A} = -2a_{SYM} \frac{\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 \cdot 4}{\frac{A}{2} \cdot 4} + a_{SYM} \frac{(A-2Z)^2}{A} = 2a_{SYM} \frac{(A-2Z)^2}{2A} + a_{SYM} \frac{(A-2Z)^2}{A} = 0$$

Energię parowania można obliczyć dla konkretnego jądra, ponieważ współczynnik δ zależy od liczby protonów i neutronów. Dla jądra ^{238}U liczba protonów wynosi 92, liczba neutronów 146, jest to więc jądro parzysto-parzyste (δ = 11.46 MeV). Jądra powstałe w wyniku rozpadu to ^{119}Pd o liczbie protonów 46 i liczbie neutronów 73. Jądra te są parzysto-nieparzyste (δ =0).

Składnik różnicy energii wiązania odpowiadający energii parowania wynosi więc: $-\frac{\delta}{A^{1/2}}$

Energia wydzielona podczas rozszczepienia:

$$E_f = a_S A^{2/3}\left(1-2^{1/3}\right)+a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}\left(1-2^{-2/3}\right)-\frac{\delta}{A^{1/2}}$$

Po podstawieniu wartości stałych mamy:

$$E_f = -4{,}77 A^{2/3} + 0{,}26\frac{Z^2}{A^{1/3}} - \frac{11{,}46}{A^{1/2}}$$

Dla jądra ^{238}U: $E_f = 175\,\text{MeV}$

Zadanie 4
Obliczyć energię wzbudzenia jądra powstałego przez wchłonięcie neutronu termicznego przez jądro ^{235}U.
Dane: masa neutronu m_n = 1,008665u, masa jądra ^{235}U = 235,043924u, masa jądra ^{236}U = 236,045563u,

Rozwiązanie
W wyniku pochłonięcia neutronu przez jądro ^{235}U powstaje jądro ^{236}U w stanie wzbudzonym. Energia wzbudzenia to różnica między masą jądra wzbudzonego i jądra w stanie podstawowym:

$$E_x = \left[m\left({}^{236}U^*\right) - m\left({}^{236}U\right)\right]$$

Uwaga. Stosujemy tu układ jednostek, w których prędkość światła c = 1 (masy wyrażone są w jednostkach energii)

Masa jądra wzbudzonego $^{236}U^*$ równa jest sumie mas jądra ^{235}U i neutronu (niewielką energię kinetyczną neutronu pomijamy).

$$m\left({}^{236}U^*\right) = m\left({}^{235}U\right) + m_n$$

$$m\left({}^{236}U^*\right) = 235{,}043924u + 1{,}008665u = 236{,}052589u$$

$$E_x = \left(236{,}052589u - 236{,}045563u\right)\cdot 931{,}502\,MeV/u = 6{,}5\,MeV$$

Energia wzbudzenia jest większa niż energia aktywacji dla ^{236}U wynosząca 6,2 MeV.
Dlatego ^{235}U ulega rozszczepieniu po pochłonięciu neutronu o dowolnie małej energii (od E_{kin} = 0)

Zadanie 5

Aktywność preparatu ^{44}Sc zmniejsza się w ciągu każdej godziny o p=16,3%. Wyznacz czas połowicznego rozpadu.

Rozwiązanie

Aktywność wyraża się wzorem:

$$A = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

Jeśli w danej chwili aktywność wynosi A_0, to po czasie t = 1h aktywność będzie wynosić:

$$A = A_0 - \frac{p}{100} A_0 = A_0 e^{-\lambda \cdot 1h}$$

$$1 - \frac{p}{100} = e^{-\lambda \cdot 1h}$$

$$\ln\left(1 - \frac{p}{100}\right) = -\lambda$$

Podstawiając wartość p otrzymujemy:

$$\lambda = 0{,}1778\,\mathrm{h}^{-1}$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 3{,}9\,\mathrm{h}$$

Zadanie 6

Jaka jest maksymalna energia kinetyczna cząstek β emitowanych przez tryt?

Wskazówka. Skorzystaj z mas nuklidów podanych w tabeli.

nuklid	masa
${}^{1}_{1}H$	1,00783u
${}^{2}_{1}H$	2,01410u
${}^{3}_{1}H$	3,01605u
${}^{3}_{2}He$	3,01603u
${}^{4}_{2}He$	4,02603u
${}^{6}_{3}Li$	6,01512u

1 u = $938 \cdot 10^{3}$ keV

Rozwiązanie

W wyniku rozpad beta trytu ${}^{3}_{1}H$ powstaje jądro ${}^{3}_{2}He$

$$ {}^{3}_{1}H \rightarrow {}^{3}_{2}He + e^{-} + \overline{\nu}_{e} $$

Maksymalna energia kinetyczna cząstek β to całkowita energia wydzielona podczas rozpadu. Energia rozpadu równa jest różnicy między masą jądra początkowego i sumie mas produktów rozpadu (masę neutrina pomijamy)

$$ Q = m_j\left({}^{3}_{1}H\right) - \left[m_j\left({}^{3}_{2}He\right) + m_e\right] $$

Biorąc pod uwagę, że masa nuklidu jest masą atomu (jądra i elektronów), masy jąder obliczamy odejmując od mas nuklidów masy elektronów w atomach.

$$ Q = m\left({}^{3}_{1}H\right) - m_e - \left[m\left({}^{3}_{2}He\right) - 2m_e + m_e\right] = m\left({}^{3}_{1}H\right) - m\left({}^{3}_{2}He\right) $$

$$ Q = 3{,}01605\mathrm{u} - 3{,}01603\mathrm{u} = 0{,}00002\mathrm{u} = 2 \cdot 10^{-5} \cdot 938 \cdot 10^{3}\mathrm{keV} = 18{,}7\mathrm{keV} $$

Odp. Maksymalna energia β emitowanych przez tryt wynosi 18,7 keV.

Zadanie 7

Która reakcja jest źródłem większej energii: fuzja ${}^{3}_{1}H$ i ${}^{3}_{2}He$ czy fuzja ${}^{2}_{1}H$ i ${}^{4}_{2}He$?

Wskazówka. Skorzystaj z mas nuklidów podanych w tabeli do zad 6

Rozwiązanie

Pierwsza reakcja przebiega zgodnie z równaniem:

$$ {}^{3}_{1}H + {}^{3}_{2}He \rightarrow {}^{6}_{3}Li $$

Energia wydzielona podczas rozpadu równa jest różnicy między masą jąder początkowych i jądra końcowego:

$$ Q = m\left({}^{3}_{1}H\right) + m\left({}^{3}_{2}He\right) - m\left({}^{6}_{3}Li\right) $$

Uwaga. Liczba elektronów w nuklidach na początku i na końcu reakcji jest taka sama.

$$ Q = 3{,}01605\mathrm{u} + 3{,}01603\mathrm{u} - 6{,}01512\mathrm{u} = 0{,}01696\mathrm{u} = 0{,}01696 \cdot 938\mathrm{MeV} = 15{,}9\mathrm{Mev} $$

Druga reakcja przebiega zgodnie z równaniem:

$$ {}^{2}_{1}H + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{6}_{3}Li $$

Energia wydzielona podczas rozpadu:

$$ Q = m\left({}^{2}_{1}H\right) + m\left({}^{4}_{2}He\right) - m\left({}^{6}_{3}Li\right) = 0{,}02501\mathrm{u} = 23{,}5\mathrm{MeV} $$

Odp. Większa energia wydziela się podczas drugiej reakcji.

Zadanie 8

Jądra zwierciadlane to jądra o tej samej liczbie nukleonów, a liczba protonów jednego równa jest liczbie neutronów drugiego jądra. Różnica mas takich jąder wynika z różnicy ich energii elektrostatycznej.
Jądra zwierciadlane $^{27}_{14}Si$ i $^{27}_{13}Al$ mają masy różniące się o ΔM = 6 MeV. Oszacuj promień tych jąder. (Różnicę między masą protonu i neutronu można zaniedbać.)

Rozwiązanie

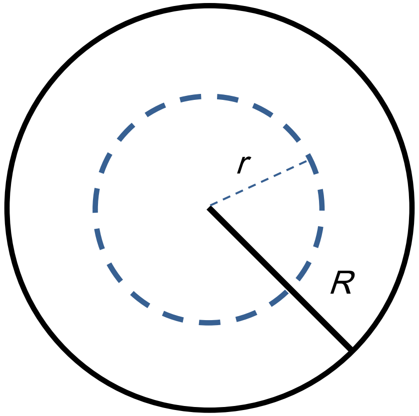
Zakładamy, że ładunek w jądrze rozłożony jest jednorodnie, a jądro ma kształt kuli. Należy więc obliczyć całkowitą energię *W* pola elektrostatycznego ładunku *Q* rozłożonego jednorodnie w kuli o promieniu *R*, całkując gęstość energii pola po całej przestrzeni.

$$W = \int_V w\, dV$$

Gęstość energii pola to: $w = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$

Natężenie *E* pola można obliczyć z prawa Gaussa – strumień natężenia pola elektrostatycznego przez powierzchnię zamkniętą równy jest całkowitemu ładunkowy wewnątrz tej powierzchni podzielonemu przez przenikalność elektryczną próżni.

Dla *r* < *R* wybieramy powierzchnię Gaussa jako sferę o promieniu *r*



Gęstość objętościowa ładunku: $\rho = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{Q}{4/3\,\pi R^3}$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Dla *r* > *R* mamy: $E \cdot 4\pi r^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Całkowita energia W pola elektrostatycznego wynosi:

$$W = \int_V w\, dV = \int_0^\infty \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr = \int_0^R \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^6}\int_0^R r^4 dr + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3Q^2}{5R}$$

Ładunek jądra $Q = e \cdot Z$ (Z - liczba atomowa równa liczbie protonów w jądrze, e – ładunek elementarny).

Różnica energii pól elektrostatycznych jąder o liczbach atomowych Z_1 i Z_2 wynosi:

$$\Delta W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3e^2}{5R}\left(Z_1^2 - Z_2^2\right)$$

Dla jąder ${}^{27}_{14}Si$ i ${}^{27}_{13}Al$ mamy:

$$\Delta W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3e^2}{5R}\left(14^2 - 13^2\right)$$

Wyznaczamy R:

$$R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3e^2}{5\cdot\Delta W}\left(14^2 - 13^2\right)$$

Przed podstawieniem do wzoru zamieniamy jednostki na jednostki układu SI

$$\Delta W = 6\mathrm{MeV} = 6\cdot 10^{6}\,\mathrm{eV} = 6\cdot 10^{6}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 9{,}6\cdot 10^{-13}\,J$$

Wartości stałych: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^{9}\,\frac{Nm^2}{C^2}$ $\qquad e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C$

$$R = \frac{9\cdot 10^{9}\cdot 1{,}6^{2}\cdot 10^{-38}}{5\cdot 9{,}6\cdot 10^{-13}}\left(196-169\right) = 3{,}88\cdot 10^{-15}\left[\mathrm{m}\right] = 3{,}88\left[\mathrm{fm}\right]$$

Zadanie 9

Hiperjądro to jądro zawierające hiperon Λ, cząstkę o masie 1115,68 MeV/c^2 i średnim czasie życia rzędu 10^{-10} s. Hiperjądro jest nietrwałe, a jego średni czas życia jest zbliżony do czasu życia hiperonu Λ.
Swobodny neutron również jest cząstką nietrwałą (średni czas życia wynosi około 15 min).
Wyjaśnić, dlaczego neutron w jądrze jest stabilny, a hiperon Λ w hiperjądrze nie?

Rozwiązanie

Spontaniczny rozpad prowadzi od stanu o wyższej energii do stanu o energii niższej, który jest zwykle stanem bardziej stabilnym. Tak więc jądro powstałe w wyniku rozpadu ma energię wiązania większą niż jądro początkowe.

Rozpad neutronu odbywa się zgodnie z równaniem: $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$
Energia rozpadu wynosi:

$$Q = m_n - m_p - m_e = 939{,}53\,\text{MeV} - 938{,}23\,\text{MeV} - 0{,}51\,\text{MeV} = 0{,}79\,\text{MeV}$$

Rozpad neutronu w jądrze ${}^{A}_{Z}\text{X}$ prowadzi do powstania jądra ${}^{A}_{Z+1}\text{X'}$. Jeśli energia wiązania jądra ${}^{A}_{Z+1}\text{X'}$ jest mniejsza niż energia wiązania jądra ${}^{A}_{Z}\text{X}$, a różnica jest większa niż energia wydzielona w rozpadzie neutronu, czyli 0,79 MeV, to rozpad prowadziłby do stanu o wyższej energii – taki rozpad jest więc niemożliwy.

Dlatego neutrony w wielu jądrach są stabilne. Tylko w jądrach niestabilnych ze względu na rozpad β neutron może się rozpaść.

Rozpad hiperonu Λ odbywa się zgodnie z równaniem: $\Lambda^0 \to p + \pi^-$

Energia rozpadu wynosi:

$$Q = m_\Lambda - m_p - m_{\pi^-} = 1115{,}68\,\text{MeV} - 938{,}27\,\text{MeV} - 139{,}57\,\text{MeV} = 37{,}84\,\text{MeV}$$

Energia wydzielona w rozpadzie hiperonu Λ znacznie przewyższa różnicę energii wiązania jądra początkowego i końcowego, więc rozpad jest możliwy.

Zadanie 10

Naturalny izotop złota $^{197}_{79}Au$ jest niestabilny ze względu na rozpad α o energii 3,3 MeV. Oszacuj czas połowicznego rozpadu, aby wykazać, że noszenie złotej biżuterii jest zupełnie bezpieczne.

Wskazówka. Skorzystaj z prawa Geigera –Nuttalla $\log_{10}\lambda = C - D\cdot E_\alpha^{-1/2}$, gdzie λ - stała rozpadu, E_α - energia cząstki α, *C i D* stałe zależne od *Z*, które można obliczyć, korzystając z mechaniki kwantowej. Do celów oszacowania przyjmij wartości stałych dla ołowiu: *C* = 52, *D* = 140MeV$^{1/2}$

Rozwiązanie

Stałą rozpadu obliczamy ze wzoru:

$$\lambda = 10^{\left(52-140E^{-1/2}\right)} = 10^{(52-140\cdot 0,55)} = 10^{-25}s^{-1}$$

Czas połowicznego rozpadu:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 6,9\cdot 10^{24}\,\mathrm{s} = 2,2\cdot 10^{17}\,\mathrm{lat}$$

Dla porównania – wiek Wszechświata jest rzędu 10^{10} lat!
Liczba rozpadów w czasie życia człowieka jest pomijalnie mała.

Zadanie 11

W eksperymencie aktywacji neutronami strumień $\Phi = 10^8$ neutronów/cm$^2\cdot$s został skierowany prostopadle na folię o powierzchni $S = 1$ cm^2, gęstości 10^{22} atomów/cm^3 i grubości $d = 10^{-2}$ cm. Przekrój czynny na wychwyt neutronu przez jądro folii wynosi $\sigma = 1$ barn (10^{-24} cm^2). W wyniku wychwytu powstaje jądro niestabilne ze względu na rozpad β o średnim czasie życia $\tau = 10^4$ s. Jaka będzie aktywność folii po czasie $t = 100$ s?

Rozwiązanie

Oznaczmy: $N(t)$ – liczba jąder tarczy,
$N_\beta(t)$ – liczba jąder niestabilnych powstałych w wyniku pochłonięcia neutronu przez jądra tarczy.

Liczba aktów pochłonięcia neutronu w czasie dt jest wprost proporcjonalna do liczby jąder tarczy $N(t)$, strumienia neutronów Φ, przekroju czynnego σ oraz czasu dt (grubość folii jest na tyle mała, że można uznać, iż jądra nie przekrywają się).

$$\mathrm{d}N(t) = -\sigma\Phi N(t)\mathrm{d}t$$

Znak minus oznacza ubytek jąder tarczy

Po rozdzieleniu zmiennych i scałkowaniu otrzymujemy:

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{N(t)} = -\sigma\Phi\mathrm{d}t \qquad N(t) = N(0)\cdot e^{-\sigma\Phi t}$$

Jaka liczba jąder tarczy pozostanie po 100 s?

$$\sigma\Phi t = 10^{-24}\,\mathrm{cm}^2 \cdot 10^8\,\mathrm{cm}^{-2}s^{-1} \cdot 10^2 s = 10^{-14}$$

Wykładnik jest bliski zera, więc liczba jąder tarczy praktycznie nie zmienia się.

$$N(t) = N(0)$$

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -\sigma\Phi N(0)$$

Szybkość produkcji jąder β-promieniotwórczych jest w przybliżeniu stała w czasie, ale jądra te rozpadają się ze stałą rozpadu λ, więc mamy:

$$\frac{\mathrm{d}N_\beta(t)}{\mathrm{d}t} = \sigma\Phi N(0) - \lambda N_\beta(t)$$

Rozwiązanie powyższego równania:

$$N_\beta(t) = \frac{\sigma\Phi N(0)}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

Aktywność wynosi:

$$A = \lambda N_\beta(t) = \sigma\Phi N(0)\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{10^4\,\mathrm{s}} = 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$A = 10^{-16}\,\mathrm{s}^{-1} \cdot \underbrace{10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3} \cdot 1\,\mathrm{cm}^2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm}}_{N(0)}\left(1 - e^{-10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}\,10^2\,\mathrm{s}}\right) = 99{,}5\,\mathrm{s}^{-1}$$

Zadanie 12

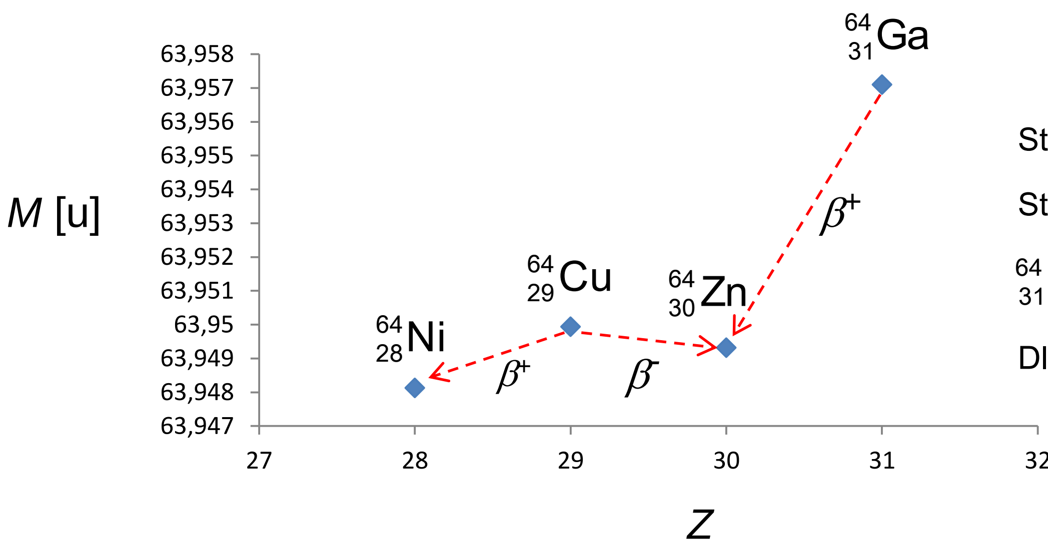
W tabeli podane są masy czterech jąder o liczbie masowej A = 64. Które jądra są stabilne, a które promieniotwórcze? Podaj schematy rozpadów jąder promieniotwórczych. Jakie są maksymalne energie emitowanych cząstek?

nuklid	Masa [u]
${}^{64}_{28}\mathrm{Ni}$	63,94813
${}^{64}_{29}\mathrm{Cu}$	63,94994
${}^{64}_{30}\mathrm{Zn}$	63,94932
${}^{64}_{31}\mathrm{Ga}$	63,95710

Rozwiązanie

Spontaniczny rozpad może zajść wtedy, gdy masa jądra jest większa niż suma mas produktów rozpadu. Przedstawmy na wykresie zależność mas jąder od liczby atomowej *Z*.

Zauważmy, że przemiana β zmienia liczbę atomową *Z* o 1 – w przemianie β^- powstaje jądro liczbie atomowej Z+1, w przemianie β^+ - jądro o liczbie atomowej Z-1



Strzałki pokazują możliwe przemiany.

Stabilne są jądra ${}^{64}_{28}\mathrm{Ni}$ oraz ${}^{64}_{30}\mathrm{Zn}$

${}^{64}_{31}\mathrm{Ga}$ ulega przemianie β^+

Dla ${}^{64}_{29}\mathrm{Cu}$ możliwa jest przemiana β^+ *i* β^-

Schematy rozpadów:

(1) $^{64}_{31}\text{Ga} \rightarrow ^{64}_{30}\text{Zn} + \text{e}^+ + \nu_e$

(2) $^{64}_{29}\text{Cu} \rightarrow ^{64}_{30}\text{Zn} + \text{e}^- + \overline{\nu}_e$

(3) $^{64}_{29}\text{Cu} \rightarrow ^{64}_{28}\text{Ni} + \text{e}^+ + \nu_e$

Energia wydzielona podczas rozpadu równa jest różnicy masy jądra początkowego i mas produktów rozpadu. Masy jąder należy wyrazić w MeV/c^2, masa elektronu wynosi 0,511 MeV/c^2, masę neutrina pomijamy. Maksymalna energia kinetyczna cząstki β równa jest energii wydzielonej w rozpadzie (energię odrzutu jądra pomijamy – jest znacznie mniejsza od energii elektronu).

$$1\text{u} = 931{,}481\text{MeV}/c^2$$

nuklid	Masa [MeV/c^2]
$^{64}_{28}\text{Ni}$	59566,47
$^{64}_{29}\text{Cu}$	59568,15
$^{64}_{30}\text{Zn}$	59567,58
$^{64}_{31}\text{Ga}$	59574,82

Dla przemiany (1):

$$E_{kin_{\max}} = m\left(^{64}_{31}\text{Ga}\right)\cdot c^2 - m\left(^{64}_{30}\text{Zn}\right)\cdot c^2 - m_e \cdot c^2 = 59574{,}82\text{MeV} - 59567{,}58\text{MeV} - 0{,}511\text{MeV} = 6{,}7359\text{MeV}$$

Dla przemiany (2):

$$E_{kin_{\max}} = m\left(^{64}_{29}Cu\right)\cdot c^2 - m\left(^{64}_{30}\text{Zn}\right)\cdot c^2 - m_e \cdot c^2 = 59568{,}15\text{MeV} - 59567{,}58\text{MeV} - 0{,}511\text{MeV} = 0{,}0665\text{MeV}$$

Dla przemiany (3):

$$E_{kin_{\max}} = m\left(^{64}_{29}\text{Cu}\right)\cdot c^2 - m\left(^{64}_{28}\text{Ni}\right)\cdot c^2 - m_e \cdot c^2 = 59568{,}15\text{MeV} - 59566{,}47\text{MeV} - 0{,}511\text{MeV} = 1{,}1750\text{MeV}$$

Zadanie 13

Sprawdź, czy spin elektronu może pochodzić od obrotu elektronu wokół osi. Oblicz prędkość, z jaką musiałby poruszać się ładunek, aby spin elektronu wynosił $s \cdot \hbar = 1/2 \cdot \hbar$
Załóż, że cały ładunek elektronu skupiony jest wzdłuż równika wirującego elektronu. Promień elektronu oblicz, zakładając, że energia potencjalna ładunku elementarnego równa jest energii spoczynkowej elektronu (tzw. klasyczny promień elektronu).

Rozwiązanie

Klasyczny promień elektronu: $$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = mc^2 \rightarrow r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}$$

Zauważmy, że $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$ jest stałą struktury subtelnej.

Mamy więc: $$r = \frac{e^2 \hbar c}{4\pi\varepsilon_0 mc^2 \hbar c} = \frac{\hbar c}{137 mc^2}$$

Spin elektronu: $s\hbar = I\omega$, gdzie $I = mr^2$ $\omega = \frac{v}{r}$

$$s\hbar = mr^2 \frac{v}{r} \rightarrow v = \frac{s\hbar}{mr} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar}{m} \cdot \frac{137 mc^2}{\hbar c} = 67{,}5c$$

Otrzymana prędkość wirowania wielokrotnie przekracza prędkość światła, jest więc niezgodna z teorią względności.
Wyobrażenie elektronu jako wirującego obiektu jest bezsensowne!

Zadanie 14
Oblicz energię separacji a) protonu, b) neutronu z jądra ${}^{16}_{8}O$
Porównaj z energią wiązania na jeden nukleon *B*/*A*.
Potrzebne masy atomowe w tabeli.

nuklid	Masa [u]
${}^{16}_{8}O$	15,994915
${}^{15}_{8}O$	15,0030645
${}^{15}_{7}N$	15,000109
n	1,00866522
p	1,00782522

Rozwiązanie

Energia separacji nukleonu (energia potrzebna do oderwania nukleonu z jądra) równa jest różnicy między masą „odrywanego” nukleonu i pozostałego jądra a masą jądra początkowego.

Energia separacji neutronu: $S_n = M_n + M(A-1,Z) - M(A,Z)$

Energia separacji protonu: $S_p = M_p + M(A-1,Z-1) - M(A,Z)$

Po podstawieniu wartości mamy:

$$S_n = 1{,}00866522\,\mathrm{u} + 15{,}0030645\,\mathrm{u} - 15{,}994915\,\mathrm{u} = 0{,}01681472\,\mathrm{u} =$$
$$= 0{,}01681472 \cdot 931{,}481\,\mathrm{MeV}/c^2 = 15{,}66\,\mathrm{MeV}/c^2$$

$$S_p = 1{,}00782522\,\mathrm{u} + 15{,}000109\,\mathrm{u} - 15{,}994915\,\mathrm{u} = 0{,}01301922\,\mathrm{u} =$$
$$= 0{,}01301922 \cdot 931{,}481\,\mathrm{MeV}/c^2 = 12{,}13\,\mathrm{MeV}/c^2$$

Energia wiązania równa jest różnicy między sumą mas nukleonów a masą jądra.

$$B = ZM_p + (A - Z)M_n - M(A,Z)$$

$$B = 8 \cdot 1{,}00782522\,\mathrm{u} + 8 \cdot 1{,}00866522\,\mathrm{u} - 15{,}994915\,\mathrm{u} = 0{,}13700852\,\mathrm{u} =$$
$$= 0{,}13700852 \cdot 931{,}481\,\mathrm{MeV}/c^2 = 127{,}62\,\mathrm{MeV}/c^2$$

Energia wiązania na jeden nukleon*:*

$$\frac{B}{A} = \frac{127{,}62}{16}\,\mathrm{MeV}/c^2 = 7{,}98\,\mathrm{MeV}/c^2$$

Energia wiązania na jeden nukleon ma wartość typową dla średnich i dużych jąder (około 8 MeV/c^2), natomiast energia separacji nukleonu jest większa od *B*/*A*.