PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Wstęp do fizyki kwantowej

Zadania z rozwiązaniami

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

Widmo słoneczne jest bardzo zbliżone do widma ciała doskonale czarnego, dla którego maksymalna moc promieniowania przypada na długość fali $\lambda_{max} = 0{,}48\mu m$

a) Znaleźć temperaturę Słońca i moc jego promieniowania

b) Obliczyć czas po którym jego masa zmaleje o 1% wskutek emisji promieniowania

Masa Słońca $M = 2 \cdot 10^{30} kg$, promień Słońca $R = 7 \cdot 10^{8} kg$

Rozwiązanie

Skorzystamy z praw opisujących promieniowanie ciała doskonale czarnego:

•Prawa Stefana-Boltzmana $\varepsilon_c(T) = \sigma T^4$ gdzie $\varepsilon_c(T)$ - całkowita zdolność emisyjna (całkowita moc promieniowania z jednostkowego obszaru powierzchni) [W/m²]. $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \dfrac{W}{m^2 K^4}$

•Prawa przesunięć Wiena $\lambda_{max} = \dfrac{b}{T}$ gdzie λ_{max} - długość fali odpowiadającej położeniu maksimum w widmie promieniowania dla temperatury T (najbardziej prawdopodobna długość fali). $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3} mK$

(a) Z wzoru Wiena wyznaczamy temperaturę powierzchni Słońca

$$T = \frac{b}{\lambda_{max}} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3} mK}{0{,}48 \cdot 10^{-6} m} = 6{,}06 \cdot 10^{3} K \cong 6000K$$

Całkowita moc promieniowania: $P_c = \varepsilon_c(T) \cdot S = \sigma T^4 \left(4\pi R^2\right) = 4{,}5 \cdot 10^{26} W$

powierzchnia Słońca:

(b) Energia wypromieniowana w czasie *t* $E = P_c t$ odpowiada utracie masy Słońca ΔM zgodnie ze wzorem Einsteina:

$$E = \Delta M c^2 = P_c t$$

$$\Delta M = 1\% M = 2 \cdot 10^{28}$$

$$t = \frac{\Delta M c^2}{P_c} = \frac{2 \cdot 10^{28} \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2}{4 \cdot 10^{26}} = 4 \cdot 10^{18} s$$

Jednostki: $$[t] = \frac{kg \frac{m^2}{s^2}}{W} = \frac{kg \frac{m^2}{s^2}}{\frac{kgm^2}{s^3}} = s$$

Wyraźmy czas w latach: $$t = \frac{4 \cdot 10^{18}}{3{,}16 \cdot 10^7} \text{lat} = 1{,}27 \cdot 10^{11} \text{lat}$$ $$1\text{rok} = 3{,}16 \cdot 10^7 s$$

Otrzymaliśmy czas dłuższy od wieku Wszechświata, który wynosi $14\text{mld}\,\text{lat} = 1{,}4 \cdot 10^{10}\text{lat}$

Słońce ma około 5 mld lat i paliwa w jego wnętrzu (wodoru) starczy na następne 5-6 mld lat.

Utrata masy na skutek promieniowania nie odgrywa więc żadnej roli w ewolucji Słońca.

Zadanie 2

Obliczyć temperaturę, jaką uzyska czarna płyta izolowana termicznie od otoczenia, do której dochodzi prostopadle światło słoneczne o natężeniu I = 1,4 kW/m^2

Rozwiązanie

Temperatura płyty ustali się, gdy energia wypromieniowana przez płytę zrówna się z energią absorbowaną. Zakładamy, że płyta nie traci ciepła w procesie przewodzenia i konwekcji (izolacja termiczna) oraz, że płyta promieniuje na obie strony. Pochłanianie promieniowania zachodzi tylko po stronie zwróconej do słońca.

Moc absorbowana: $P_{abs} = IS$ S – powierzchnia płyty

Moc wypromieniowana: $P_{prom} = \left(\sigma T^4\right)\left(2S\right)$

$$IS = 2S\sigma T^4$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{I}{2\sigma}} = 333{,}3K$$

lub $t = 60{,}3^0 C$

Zadanie 3

Znaleźć gęstość strumienia fotonów w odległości 1m od punktowego źródła światła o mocy 1W, jeśli światło jest:

a) monochromatyczne, o długości fali 0,5 μm;

b) zawiera dwie linie widmowe o długościach fali 0,7 μm i 0,4 μm, których natężenia pozostają w stosunku 1:2.

Rozwiązanie

Gęstość strumienia fotonów to liczba fotonów przechodzących przez jednostkową powierzchnię w jednostce czasu:

$$\Phi = \frac{n}{A}$$

n ← liczba fotonów wysyłanych ze źródła na sekundę

A ← powierzchnia, na którą padają

Ponieważ źródło jest punktowe, *A* jest powierzchnią kuli o promieniu *R* =1m: $A = 4\pi R^2$

Liczba fotonów to: $n = \frac{P}{E_f}$

P ← moc źródła

E_f ← energia fotonu: $E_f = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow n = \frac{P\lambda}{hc}$

$$\boxed{\begin{aligned} h &= 6{,}626\cdot 10^{-34}\, J\cdot s \\ c &= 3\cdot 10^{8}\, m/s \end{aligned}}$$

$$\Phi = \frac{n}{A} = \frac{P\lambda}{hc\cdot 4\pi R^2}$$

a) $\lambda = 0{,}5\mu m = 0{,}5 \cdot 10^{-6}\, m$

$$\Phi = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-7}}{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8} \cdot 4\pi} = \frac{5}{12 \cdot 6{,}626\pi} \cdot 10^{19} = 0{,}020 \cdot 10^{19} = 2 \cdot 10^{17} \left[m^{-2} s^{-1} \right]$$

Jednostki: $[\Phi] = \dfrac{W \cdot m}{J \cdot s \cdot \dfrac{m}{s} \cdot m^2} = \dfrac{J}{s \cdot J \cdot m^2} = m^{-2} s^{-1}$

b) $\lambda_1 = 0{,}7\mu m = 0{,}7 \cdot 10^{-6}\, m$ $\quad \lambda_2 = 0{,}4\mu m = 0{,}4 \cdot 10^{-6}\, m$

stosunek natężeń: $p_1 : p_2 = 1 : 2$

$$n = n_1 + n_2 = \frac{P}{hc}\left(\frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2 \right) \quad \Rightarrow \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{P}{hcA}\left(\frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2 \right)$$

$$\Phi = \frac{P}{hcA}\left(\frac{1}{3}0{,}7 + \frac{2}{3}0{,}4 \right) \cdot 10^{-6}\, m = \frac{P}{hcA}\frac{1}{3} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-6}\, m = \frac{P}{hcA} 0{,}5 \cdot 10^{-6}\, m$$

Jest to wynik dokładnie taki sam jaki otrzymaliśmy w punkcie a).

Zadanie 4

Krótki impuls światła o energii $E = 7{,}5J$ pada w postaci wąskiej wiązki na powierzchnię zwierciadła o współczynniku odbicia $r = 0{,}6$. Kąt padania $\vartheta = 30^\circ$. Znaleźć pęd przekazany powierzchni.

Rozwiązanie

Dane:

energia wiązki odbitej

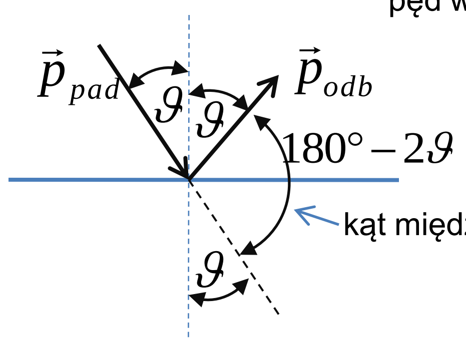
$$E = 7{,}5J \qquad r = \frac{E_{odb}}{E_{pad}} = 0{,}6 \qquad \vartheta = 30^\circ$$

energia wiązki padającej

Szukamy pędu przekazanego powierzchni:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{pad} - \vec{p}_{odb}$$

pęd wiązki padającej   pęd wiązki odbitej



kąt między pędem wiązki padającej a pędem wiązki odbitej

Aby obliczyć wartość wektora pędu, obie strony równania podnosimy do kwadratu:

$$(\Delta p)^2 = p^2{}_{pad} + p^2{}_{odb} - 2\vec{p}_{pad} \cdot \vec{p}_{odb}$$

$$\vec{p}_{pad} \cdot \vec{p}_{odb} = p_{pad} p_{odb} \cos(180^\circ - 2\vartheta) = -p_{pad} p_{odb} \cos(2\vartheta)$$

$$(\Delta p)^2 = p^2{}_{pad} + p^2{}_{odb} + 2 p_{pad} p_{odb} \cos(\ 2\vartheta)$$

$$p = \frac{E}{c} \qquad p_{pad} = \frac{E_{pad}}{c} \qquad p_{odb} = \frac{E_{odb}}{c} = \frac{r}{c} E_{pad}$$

$$(\Delta p)^2 = \frac{E^2{}_{pad}}{c^2} \left[1 + r^2 + 2r\cos(\ 2\vartheta) \right]$$

$$\Delta p = \frac{E_{pad}}{c} \sqrt{1 + r^2 + 2r\cos(\ 2\vartheta)} = \frac{7{,}5}{3 \cdot 10^8} \sqrt{1 + 0{,}36 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot \frac{1}{2}} = 3{,}5 \cdot 10^{-8}$$

Jednostki: $$[\Delta p] = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} \frac{s}{m} = \frac{kg \cdot m}{s}$$

Odpowiedź: $$\Delta p = 3{,}5 \cdot 10^{-8} \frac{kg \cdot m}{s}$$

Zadanie 5

W impulsie trwającym $\tau = 0{,}1ms$ laser promieniuje wąską wiązkę światła o energii $E = 10J$.

Znaleźć średnie (w czasie trwania impulsu) ciśnienie tej wiązki światła, jeśli skupić ją w plamkę o średnicy $d = 10\mu m$ na prostopadłej do wiązki powierzchni o współczynniku odbicia $r = 0{,}5$.

Rozwiązanie

Dane: $\tau = 0{,}1ms = 0{,}1 \cdot 10^{-3} s$ $\quad d = 10\mu m = 10 \cdot 10^{-6} m$ $\quad r = 0{,}5$

$$E_{pad} = E = 10J \qquad E_{odb} = rE_{pad} \qquad d = 10\mu m$$

Szukamy ciśnienia wiązki: $P = \dfrac{F}{S}$

gdzie: $S = \dfrac{1}{4}\pi d^2 \leftarrow$ powierzchnia plamki; $\quad F = \dfrac{\Delta p}{\tau}$ $\Delta p \leftarrow$ przekazany pęd

F – siła działająca na powierzchnię S

$\Delta p = \dfrac{E}{c}(1 + r)$ - dla wiązki padającej prostopadle do powierzchni $(\vartheta = 0)$, ponieważ:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{pad} - \vec{p}_{odb} \Rightarrow (\Delta p)^2 = p^2{}_{pad} + p^2{}_{odb} - 2p_{pad}p_{odb}\cos(180^\circ - 2\vartheta) =$$

$$= p^2{}_{pad} + p^2{}_{odb} + 2p_{pad}p_{odb} \Rightarrow \Delta p = p_{pad} + p_{odb}$$

$$p = \frac{E}{c} \Rightarrow \Delta p = \frac{1}{c}\left(E_{pad} + E_{odb}\right) = \frac{1}{c}E_{pad}(1 + r)$$

Ostatecznie: $$P = \frac{\Delta p}{\tau S} = \frac{4E(1+r)}{c\tau\pi d^2}$$

Podstawiamy wartości:

$$P = \frac{4 \cdot 10 \cdot (1+0{,}5)}{3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-4}\pi \cdot 10^{-10}} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 1{,}5}{3\pi \cdot 10^{-6}} = \frac{2}{\pi} \cdot 10^7 \cong 6{,}4 \cdot 10^6$$

Jednostki: $$[P] = \frac{J}{\frac{m}{s} s m^2} = \frac{J}{m m^2} = \frac{N}{m^2} = Pa$$

Odpowiedź: $$P \cong 6{,}4 \cdot 10^6 \, Pa$$

Zadanie 6

Światło przejawia swoją korpuskularną naturę w tym, że ma pęd. Wykorzystując ten fakt, wykazać, że foton w próżni:

a) nie może wytworzyć pary elektron-pozyton,

b) w pojedynczym zderzeniu nie może oddać całej swej energii elektronowi swobodnemu (nie może zostać pochłonięty przez swobodny elektron)

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia: energia fotonu: $E_f = h\nu$, pęd fotonu: $p_f = \dfrac{E_f}{c} = \dfrac{h\nu}{c}$

a) Założmy, że foton wytworzy parę elektron-pozyton.

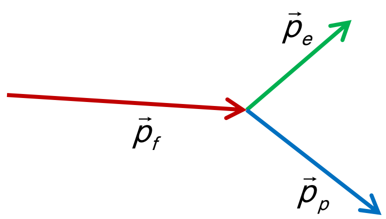
E_e - energia całkowita elektronu, E_p - energia całkowita pozytonu, p_e – pęd elektronu, p_p - pęd pozytonu. Z zasady zachowania energii mamy:

$$E_f = E_e + E_p$$

$$h\nu = \sqrt{m_0^2c^4 + p_e^2c^2} + \sqrt{m_0^2c^4 + p_p^2c^2}$$

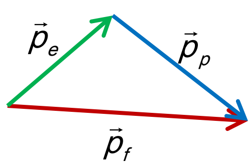
Pęd fotonu: $p_f = \dfrac{h\nu}{c} = \sqrt{m_0^2c^2 + p_e^2} + \sqrt{m_0^2c^2 + p_p^2} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{p}_f| > |\vec{p}_e| + |\vec{p}_p| \qquad (1)$

Korzystamy z zasady zachowania pędu: $\vec{p}_f = \vec{p}_e + \vec{p}_p$



Wektory pędów tworzą trójkąt i zachodzi nierówność dla boków trójkąta:

$$|\vec{p}_f| < |\vec{p}_e| + |\vec{p}_p| \qquad (2)$$



Nierówności (1) i (2) są sprzeczne, więc założenie, że foton może wytworzyć parę elektron-pozyton jest fałszywe.

b) Załóżmy, że foton odda całą energię w zderzeniu ze swobodnym elektronem.

Zasada zachowania energii: $$E_f + m_0c^2 = mc^2 = \sqrt{m_0^2c^4 + p_e^2c^2} \qquad (3)$$

energia spoczynkowa elektronu

energia elektronu po zderzeniu

pęd elektronu po zderzeniu

Zasada zachowania pędu: $$\vec{p}_f = \vec{p}_e$$

$$p_f = \frac{h\nu}{c} = p_e \qquad (4)$$

Wstawiamy wyrażenie na pęd elektronu (4) do równania (3) i uwzględniamy, że: $E_f = h\nu$

$$h\nu + m_0c^2 = \sqrt{m_0^2c^4 + (h\nu)^2}$$

Otrzymana równość jest fałszywa dla $m_0 \neq 0$ i $h\nu \neq 0$

Wniosek: założenie, że foton odda całą energię w zderzeniu ze swobodnym elektronem jest fałszywe.

Zadanie 7

Granica zjawiska fotoelektrycznego od strony fal długich wynosi dla rubidu $\lambda_{gr} = 540nm$. Wyznaczyć pracę wyjścia i maksymalną prędkość elektronów wybijanych z powierzchni metalu oświetlonego światłem długości fali $\lambda = 400nm$

Rozwiązanie

$$h\nu = W + E_k$$

praca wyjścia (W); maksymalna energia kinetyczna wybitych elektronów (E_k)

λ_{gr} to taka długość fali, która powoduje wybicie elektronu, którego energia kinetyczna jest równa 0, więc

$$h\nu_{gr} = W \Rightarrow W = \frac{hc}{\lambda_{gr}}$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

maksymalna prędkość elektronów (v)

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - W = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{gr}}\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{gr}}\right)}$$

$$\lambda_{gr} = 540nm = 540 \cdot 10^{-9} m$$

$$\lambda = 400nm = 400 \cdot 10^{-9} m$$

$$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34} J \cdot s$$

$$h = 4{,}14 \cdot 10^{-15} eV \cdot s$$

$$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31} kg$$

$$c = 3 \cdot 10^{8}\ m/s$$

$$1eV = 1{,}60 \cdot 10^{-19} J$$

Rachunek na jednostkach:

$$[v]=\left(\frac{J\cdot m\cdot s}{kg\cdot s\cdot m}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{N\cdot m}{kg}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{kg\cdot m^2}{s^2\cdot kg}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{m}{s}$$

$$[W]=\frac{eV\cdot s\cdot m}{m\cdot s}=eV$$

Podstawiamy wartości liczbowe:

$$W=\frac{4{,}14\cdot 10^{-15}\cdot 3\cdot 10^{8}}{5{,}4\cdot 10^{-7}}=2{,}3 \qquad W=2{,}3eV=3{,}68\cdot 10^{-19}J$$

$$v=\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{9{,}11\cdot 10^{-31}kg}\left(\frac{1}{4\cdot 10^{-7}}-\frac{1}{5{,}4\cdot 10^{-7}}\right)}\cong\sqrt{0{,}2830\cdot 10^{12}}\cong 0{,}53\cdot 10^{6}$$

$$v=0{,}53\cdot 10^{6}\,\frac{m}{s}=1{,}8\cdot 10^{-3}c$$

Zadanie 8

Światło o mocy P = 1mW i długości fali $\lambda = 456nm$ pada na powierzchnię cezu. Jakie jest natężenie prądu powstałego w zjawisku fotoelektrycznym oraz minimalny potencjał hamowania potrzebny do tego, aby prąd przestał płynąć? Praca wyjścia dla cezu wynosi 1,93 eV. Założyć, że 50% fotonów wybija elektrony.

Rozwiązanie

Bilans energii dla zjawiska fotoelektrycznego: $$h\nu = W + \frac{mv^2}{2}$$

Minimalny potencjał hamowania to różnica potencjałów *U* potrzebna do zahamowania elektronów. Aby zahamować przepływ prądu praca pola elektrycznego musi być równa lub większa od energii kinetycznej elektronów.

$$\frac{mv^2}{2} = eU$$

$$\left.\begin{array}{l} h\nu = W + eU \\ \nu = \dfrac{c}{\lambda} \end{array}\right\} \quad U = \frac{1}{e}\left(\frac{hc}{\lambda} - W\right)$$

$$U = 0{,}79V$$

$$\lambda = 456nm = 456 \cdot 10^{-9}\,m$$

$$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s$$

$$h = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\,eV \cdot s$$

$$c = 3 \cdot 10^{8}\,m/s$$

Natężenie prądu:

Natężenie prądu to liczba wybitych elektronów razy ładunek elektronu podzielona przez czas.

$$I = \frac{eN_e}{t}$$

50% fotonów powoduje wybicie elektronu, czyli:

Energia N_f fotonów

Energia 1 fotonu

$$I = e\frac{0{,}5N_f}{t} = 0{,}5e\frac{P}{h\nu}$$

Moc światła: $P = \frac{E_f}{t} = \frac{h\nu N_f}{t}$

Jednostki: $[I] = \frac{C \cdot m \cdot W}{J \cdot m} = \frac{C \cdot J}{J \cdot s} = \frac{C}{s} = A$

$$I \cong 1{,}8\,\mu A$$

Zadanie 9

Początkowo próbowano opisywać zjawisko fotoelektryczne zgodnie z falową naturą światła. Sprawdźmy, do jakich wniosków prowadzi taki opis.

W odległości $l = 1m$ od płytki cezowej znajduje się monochromatyczne źródło światła o mocy $P = 30W$. Zakładając, że elektron może zaabsorbować energię z koła o promieniu równym promieniowi atomu $r_o = 10^{-10}m$ obliczyć, jakiego opóźnienia można się spodziewać między włączeniem światła a obserwacją fotoelektronu, zgodnie z falową teorią światła. Praca wyjścia dla cezu $W = 1{,}89eV$.

Rozwiązanie

Źródło światła promieniuje jednakowo we wszystkich kierunkach. Energia wypromieniowana w jednostce czasu na jednostkę powierzchni kuli o promieniu $l = 1m$ wynosi:

$$\frac{P}{4\pi l^2}$$

Elektron może gromadzić energię padającą na kołową powierzchnię płytki o promieniu $r_o = 10^{-10}m$ i środku w miejscu, w którym znajduje się elektron. Cała padająca energia jest absorbowana. Energia absorbowana przez elektron w jednostce czasu:

$$\frac{P}{4\pi l^2} \cdot \pi r_o^2 = P\frac{r_o^2}{4l^2}$$

Teraz musimy obliczyć, ile czasu potrzeba, aby elektron zgromadził energię wystarczającą do pokonania bariery potencjału, czyli energię równą pracy wyjścia z metalu .

$$W = 1{,}89eV = 3{,}02 \cdot 10^{-19} J$$

$$W = P\frac{r_o^2}{4l^2} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{4Wl^2}{r_o^2 P}$$

$$\Delta t = \frac{4 \cdot 3{,}02 \cdot 10^{-19} \cdot 1}{10^{-20} \cdot 30} = 4 \qquad [\Delta t] = \frac{J \cdot m^2}{m^2 \cdot W} = \frac{J}{J/s} = s$$

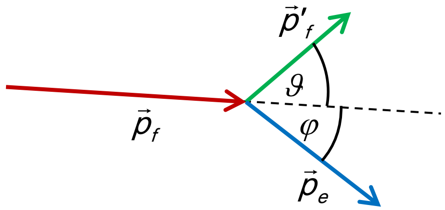
$$\Delta t = 4s$$

Otrzymany wynik jest sprzeczny z doświadczeniem, bo emisję elektronów obserwuje się niemal natychmiast po włączeniu światła, a nie jak wynika z powyższych rachunków, po kilku sekundach. Sprzeczność tę wyjaśnił Einstein, pokazując, że w zjawisku fotoelektrycznym przejawia się korpuskularna natura światła. Elektron wybity jest przez pojedynczy foton, który natychmiast przekazuje mu całą swoją energię. .

Zadanie 10

Efekt Comptona to rozproszenie fotonu na swobodnym elektronie, w wyniku którego foton oddaje część energii elektronowi i zmienia kierunek ruchu. Oblicz zmianę długości fali fotonu rozproszonego pod kątem ϑ.

Rozwiązanie



Energia fotonu padającego: $E_f = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$

Energia spoczynkowa elektronu: $E_o = m_o c^2 = 511 keV$

Energia fotonu rozproszonego: $E'_f = h\nu' = \frac{hc}{\lambda'}$

Energia elektronu po rozproszeniu: $E_e = mc^2$

Zasada zachowania energii: $E_f + m_o c^2 = E_f' + mc^2$ (1)

Zasada zachowania pędu: $\vec{p}_f = \vec{p}_e + \vec{p}'_f$ (2)

Z równania (1) wyznaczamy kwadrat energii elektronu $E_e^2 = m^2 c^4$, wstawiając: $E_f = p_f c$ i $E'_f = p'_f c$

$$p_f c + m_o c^2 = p_f' c + mc^2 \Big| : c$$

$$p_f - p_f' + m_o c = mc \Big|^2$$

$$(p_f - p_f' + m_o c)^2 = m^2 c^2 = \frac{E_e^2}{c^2}$$

Wykorzystując związek między energią a pędem elektronu: $E^2 = m_e^2 c^4 = p_e c^2 + m_o^2 c^4$

otrzymujemy: $\left(p_f - p'_f + m_o c\right)^2 = p_e^2 + m_o^2 c^2 \rightarrow p_e^2 = \left(p_f - p'_f + m_o c\right)^2 - m_o^2 c^2 \quad (3)$

Z równania (2) wyznaczamy kwadrat pędu elektronu:

$$p_e^2 = \left(\vec{p}_f - \vec{p}'_f\right)^2 = p_f^2 + p'^2_f - 2 p_f p'_f \cos\vartheta \quad (4)$$

Przyrównując prawe strony równania (3) i (4) otrzymujemy:

$$\left(p_f - p'_f + m_o c\right)^2 - m_o^2 c^2 = p_f^2 + p'^2_f - 2 p_f p'_f \cos\vartheta$$

$$p_f^2 + p'^2_f + m_0^2 c^2 - 2 p_f p'_f + 2 p_f m_0 c - 2 p'_f m_0 c - m_o^2 c^2 = p_f^2 + p'^2_f - 2 p_f p'_f \cos\vartheta$$

Z otrzymanego równania wyznaczamy pęd fotonu rozproszonego: p'_f

$$p'_f = \frac{p_f m_0 c}{m_0 c + p_f (1 - \cos\vartheta)} = \frac{p_f}{1 + \frac{p_f}{m_0 c}(1 - \cos\vartheta)}$$

Wstawiamy: $p_f = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ oraz $p'_f = \frac{h\nu'}{c} = \frac{h}{\lambda'}$

$$\frac{h}{\lambda'} = \frac{\frac{h}{\lambda}}{1 + \frac{h}{\lambda m_0 c}(1 - \cos\vartheta)} \rightarrow \lambda' = \lambda + \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\vartheta)$$

Otrzymujemy przesunięcie Comptona: $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\vartheta)$ gdzie $\frac{h}{m_0 c}$ to comptonowska długość fali

Zadanie 11

Foton zderzył się z nieruchomym elektronem swobodnym i uległ rozproszeniu. Po zderzeniu energia fotonu i energia kinetyczna elektronu są sobie równe. Kąt pomiędzy ich kierunkami po rozproszeniu wynosi $\vartheta + \varphi = 90°$

Wyznaczyć energię (pęd) padającego fotonu.

Rozwiązanie

Energia spoczynkowa elektronu: $E_o = m_o c^2 = 511 keV$

Korzystamy z zasady zachowania energii: $E_f + m_o c^2 = E_f' + mc^2$

Energia elektronu po zderzeniu

Energia padającego fotonu

Energia rozproszonego fotonu

$$E_f = E_f' + mc^2 - m_o c^2 = E_f' + E_{ke}$$

Energia kinetyczna elektronu po zderzeniu równa energii fotonu po zderzeniu, więc:

$$E_f = 2\left(mc^2 - m_o c^2\right) = 2\left(\sqrt{p_e^2 c^2 + m_o^2 c^4} - m_o c^2\right)$$

$$E^2 = m_e^2 c^4 = p_e^2 c^2 + m_o^2 c^4$$

Nie znamy jeszcze pędu elektronu. Korzystamy z zasady zachowania pędu: $\vec{p}_f = \vec{p}_e + \vec{p}_f'$

$$p_f^2 = p_e^2 + p_f'^2 + 2p_f' p_e \cos(\vartheta + \varphi) = p_e^2 + p_f'^2 \Rightarrow p_e^2 = p_f^2 - p_f'^2$$

$$p_f = \frac{E_f}{c} \qquad p_f' = \frac{E_f'}{c} = \frac{1}{2}\frac{E_f}{c}$$

$$p_e^2 = \frac{E_f^2}{c^2} - \frac{1}{4}\frac{E_f^2}{c^2} = \frac{3}{4}\frac{E_f^2}{c^2} \Rightarrow p_e = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{E_f}{c}$$

$$E_f = 2\left(\sqrt{\frac{3}{4}\frac{E_f^2}{c^2}c^2 + m_o^2c^4} - m_oc^2\right)$$

$$\frac{E_f}{2} + m_oc^2 = \sqrt{\frac{3}{4}E_f^2 + m_o^2c^4}$$

Obie strony równania podnosimy do kwadratu:

$$\frac{E_f^2}{4} + m_o^2c^4 + E_f m_oc^2 = \frac{3}{4}E_f^2 + m_o^2c^4$$

$$E_f m_oc^2 = \frac{1}{2}E_f^2$$

$$E_f = 2m_oc^2 = 2 \cdot 511 keV = 1022 keV = 1{,}022 MeV$$

Zadanie 12

Foton o energii E_f = 400 keV został rozproszony na nieruchomym, swobodnym elektronie. Znaleźć energię kinetyczną i pęd elektronu po zderzeniu, jeśli komptonowskie przesunięcie długości fali $\Delta\lambda = 0{,}0012 nm$

Rozwiązanie

$$E_f = 400 keV = 4\cdot 10^5 eV$$

$$\Delta\lambda = 0{,}0012 nm = 1{,}2\cdot 10^{-12} m$$

$$E_f = E'_f + E_{ke}$$

Energia kinetyczna elektronu po zderzeniu

Energia padającego fotonu

Energia rozproszonego fotonu

$$E_{ke} = E_f - E'_f \qquad E'_f = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} \qquad E_f = \frac{hc}{\lambda} \to \lambda = \frac{hc}{E_f} = 3{,}1\cdot 10^{-12} m$$

$$E_{ke} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)} = 1{,}11\cdot 10^5 eV$$

Energia kinetyczna elektronu porównywalna z energią spoczynkową $m_0 c^2 = 5\cdot 10^5 eV$ - w celu obliczenia pędu stosujemy wzory relatywistyczne.

$$E^2 = p_e^2 c^2 + m_o^2 c^4 = \left(m_0 c^2 + E_{ke}\right)^2 \Longrightarrow p_e = \frac{1}{c}\sqrt{E_{ke}^2 + 2 m_0 c^2 E_{ke}} = 355{,}7 keV/c$$

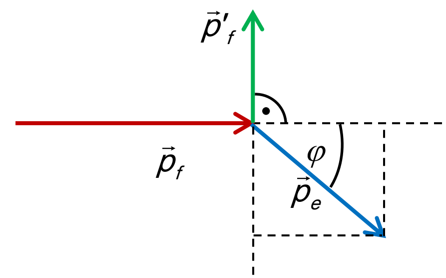
Zadanie 13

W zjawisku Comptona foton o energii E_f = 100 keV został rozproszony pod kątem ϑ = 90^0. Wyznaczyć:

a) Energię fotonu po zderzeniu,

b) Energię kinetyczną elektronu,

c) Kierunek odrzutu elektronu.



Rozwiązanie

a) Zasada zachowania energii: $E_f + m_o c^2 = E_f' + E_e$

Energię elektronu wyrażamy przez pęd: $E_e^2 = p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4$

$$-E_f' + E_f + m_o c^2 = \left(p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$-E_f' + E_f + m_o c^2 = \left(E_f^2 + E_f'^2 + m_0^2 c^4\right)^{\frac{1}{2}}$$

Podnosimy obie strony równania do kwadratu i otrzymujemy:

$$E_f' = E_f \frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + E_f} = 83{,}6 keV$$

b) Energia kinetyczna elektronu równa jest stracie energii fotonu:

$$E_{ke} = E_f - E_f' = 16{,}4 keV$$

Pęd elektronu obliczamy z zasady zachowania pędu

$$\vec{p}_f = \vec{p}'_f + \vec{p}_e$$

wektory $\vec{p}_f$ i $\vec{p}'_f$ są prostopadłe, więc:

$$p_e^2 = p_f'^2 + p_f^2 \qquad p_f = \frac{E_f}{c}$$

$$p_e^2 = \frac{1}{c^2}\left(E_f'^2 + E_f^2\right)$$

c) Kąt φ wyznaczamy z trójkąta, jaki tworzą wektory pędów.

$$tg\varphi = \frac{p'_f}{p_f} = \frac{E'_f}{E_f} = 0{,}836 \rightarrow \varphi = 40^0$$

Zadanie 14

Stosując postulaty Bohra, wyznacz energię elektronu na *n*-tej orbicie atomu wodoru.

Rozwiązanie

Postulat Bohra:
Elektron znajdujący się na stacjonarnej orbicie posiada moment pędu spełniający warunek

$$mvr = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

n – liczba całkowita, *h* – stała Plancka

Energia elektronu jest sumą energii potencjalnej pola elektrycznego wytwarzanego przez proton o ładunku +*e* oraz energii kinetycznej.

$$E = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{mv^2}{2}$$

Na elektron działa siła elektrostatyczna, która spełnia rolę siły dośrodkowej.

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Równanie to wraz z postulatem Bohra tworzą układ 2 równań, z których można wyznaczyć prędkość v_n i promień r_n *n*-tej orbity

$$\begin{cases} \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} = \dfrac{mv_n^2}{r_n} \\ mv_n r_n = n\dfrac{h}{2\pi} \end{cases} \Longrightarrow \quad v_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 hn}, \quad r_n = \frac{h^2\varepsilon_0 n^2}{\pi m e^2}$$

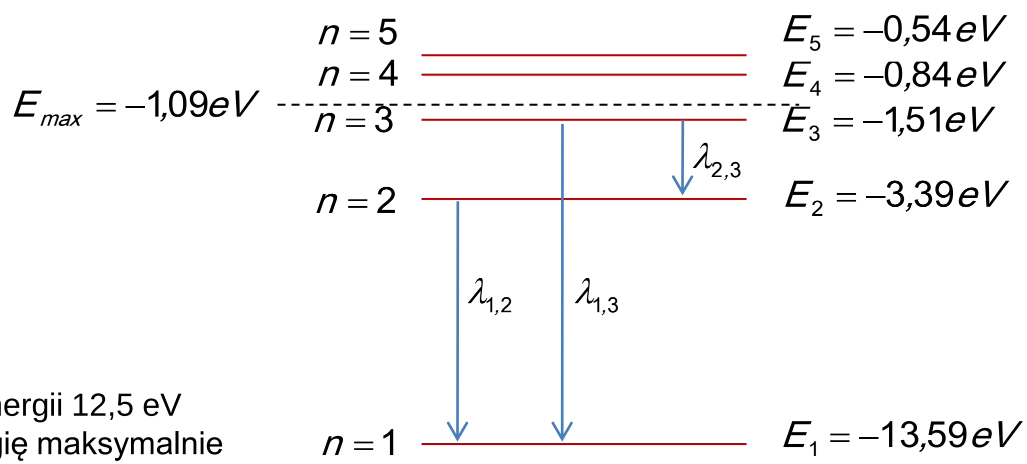
Po wstawieniu tych wyrażeń do wzoru na energię, otrzymujemy:

$$\boxed{E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0 h^2}\cdot\frac{1}{n^2} = -13{,}59\,eV\cdot\frac{1}{n^2}}$$

Zadanie 15

Jakie linie widmowe wystąpią przy wzbudzeniu atomu wodoru elektronami o energii 12,5 eV.

Rozwiązanie



Energie elektronu na kolejnych orbitach:

$$E_n = -13{,}59\,eV \cdot \frac{1}{n^2}$$

Przy wzbudzaniu atomu wodoru elektronami o energii 12,5 eV elektron z pierwszej orbity może zwiększyć energię maksymalnie do E_{max} =(-13,59+12,5)eV = -1,09eV, czyli może przeskoczyć na orbitę drugą lub trzecią.
Wystąpią 3 linie widmowe: $\lambda_{1,3}$ $\lambda_{1,2}$ $\lambda_{2,3}$

Energie emitowanych fotonów:

$$E_{1,3} = E_3 - E_1 = (-1{,}51 + 13{,}59)eV = 12{,}08eV$$

$$E_{1,2} = E_2 - E_1 = (-3{,}39 + 13{,}59)eV = 10{,}2eV$$

$$E_{2,3} = E_3 - E_2 = (-1{,}51 + 3{,}39)eV = 1{,}88eV$$

$$E_f = h\frac{c}{\lambda} = E_n - E_k = \frac{me^4}{8\varepsilon_0 h^2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Długości fal emitowanych fotonów wygodnie obliczyć z empirycznego wzoru Rydberga

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0 h^3 c}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right) = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n \rightarrow k$$

Stała Rydberga $R = 1{,}097 \cdot 10^{7}\, m^{-1}$

$$\frac{1}{\lambda_{1,3}} = R\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{9}R \rightarrow \lambda_{1,2} = 1{,}026 \cdot 10^{-7}\, m$$

$$\frac{1}{\lambda_{1,2}} = R\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}R \rightarrow \lambda_{1,2} = 1{,}215 \cdot 10^{-7}\, m$$

Seria Lymana (nadfiolet)

$$\frac{1}{\lambda_{2,3}} = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = \frac{5}{36}R \rightarrow \lambda_{2,3} = 6{,}563 \cdot 10^{-7}\, m$$

Seria Balmera (światło widzialne)

Zadanie 16

Obliczyć długości fal pierwszych trzech linii w serii Balmera oraz granicę tej linii. W jakiej części widma leżą te linie?

Rozwiązanie

Seria Balmera powstaje, gdy elektron w atomie wodoru przeskakuje na drugą orbitę: k = 2, n = 3, 4, 5…

Korzystamy z wzoru Rydberga

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (1) \qquad R = 1{,}097 \cdot 10^7\, m^{-1}$$

$$n = 3 \qquad \frac{1}{\lambda_1} = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = \frac{5}{36}R \qquad \lambda_1 = \frac{36}{5R} = 6{,}56 \cdot 10^{-7}\, m = 656 nm \qquad H_\alpha$$

$$n = 4 \qquad \frac{1}{\lambda_2} = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = \frac{3}{16}R \qquad \lambda_2 = \frac{16}{3R} = 4{,}86 \cdot 10^{-7}\, m = 486 nm \qquad H_\beta$$

$$n = 5 \qquad \frac{1}{\lambda_3} = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{25}\right) = \frac{21}{100}R \qquad \lambda_3 = \frac{100}{21R} = 4{,}34 \cdot 10^{-7}\, m = 434 nm \qquad H_\gamma$$

Granicę serii znajdziemy, licząc granicę wyrażenia (1) dla $n \to \infty$

$$\frac{1}{\lambda_{gr}} = R\left(\frac{1}{4}\right) \to \lambda_{gr} = \frac{4}{R} = 364{,}6 nm \cong 365 nm$$

Linie serii Balmera leżą w widzialnej części widma (380nm – 780nm). Granica serii leży już w nadfiolecie.

Zadanie 17

Wyznaczyć najmniejszą energię niezbędną do wzbudzenia całego widma dwukrotnie zjonizowanego atomu litu.

Rozwiązanie

Dwukrotnie zjonizowany atomu litu (Z = 3) ma jeden elektron. Taki atom o jednym elektronie nazywamy atomem wodoropodobnym. Energię elektronu na n-tej orbicie wyznaczamy podobnie jak dla atomu wodoru (Zad. 12) z tym, że ładunek jądra jest równy Ze.

$$E = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{mv^2}{2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} = \dfrac{mv_n^2}{r_n} \\ mv_n r_n = n\dfrac{h}{2\pi} \end{cases} \Longrightarrow \quad v_n = \frac{Ze^2}{2\varepsilon_0 hn}, \quad r_n = \frac{h^2\varepsilon_0 n^2}{\pi m Z e^2}$$

$$\boxed{E_n = -\frac{mZ^2e^4}{8\varepsilon_0 h^2}\cdot\frac{1}{n^2} = -13{,}59\,eV\cdot Z^2\cdot\frac{1}{n^2}}$$

Energia fotonu, który może spowodować przeskok elektronu na wyższą orbitę $(n \to k)$ wynosi

$$E_f = E_n - E_k = 13{,}59\,eV\cdot Z^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Najmniejsza energia do wzbudzenia całego widma to energia graniczna dla k = 1; $n \to \infty$

$$E_f = 13{,}59\,eV\cdot Z^2 = 122{,}3\,eV$$

Zadanie 18

O ile zmieni się długość fali de Broglie'a elektronu przy wyrzuceniu go przez foton o energii E_f = 14,5 eV z pierwszej orbity bohrowskiej w atomie wodoru.

Rozwiązanie

Zgodnie z korpuskulano-falową teorią materii poruszająca się cząstka jest jednocześnie falą o długości $\lambda = \dfrac{h}{p}$,

gdzie p jest pędem cząstki.

Aby obliczyć długość fali elektronu na orbicie w atomie wodoru, skorzystamy z postulatu Bohra

$$pr = n\frac{h}{2\pi}$$

n – liczba całkowita, h – stała Plancka, p – pęd elektronu

$$\frac{p}{h} = n\frac{1}{2\pi r} \rightarrow \lambda_n = \frac{2\pi r_n}{n}$$

gdzie

$$r_n = \frac{h^2 \varepsilon_0 n^2}{\pi m e^2}$$

dla n =1 $\qquad \lambda_1 = 2\pi r_1 = 3{,}3 \cdot 10^{-10}\, m$

Energia fotonu, który wybił elektron z atomu jest większa od energii jonizacji W = 13,59 eV.
Elektron uzyska energię kinetyczną E_k, którą obliczymy z równania:

$$E_f = W + E_k \rightarrow E_k = 0{,}91 eV$$

Energia kinetyczna elektronu jest dużo mniejsza od jego energii spoczynkowej $E_o = m_o c^2 = 511 keV$
Możemy więc użyć nierelatywistycznego związku między energią kinetyczną i pędem.

$$p = \sqrt{2mE_k} = 5{,}15 \cdot 10^{-25}\, \frac{kgm}{s}$$

$$\lambda_2 = \frac{h}{p} = 12{,}8 \cdot 10^{-10}\, m$$

$$\boxed{\begin{aligned} h &= 6{,}63 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s \\ m &= 9{,}11 \cdot 10^{-31}\, kg \\ 1eV &= 1{,}60 \cdot 10^{-19}\, J \end{aligned}}$$

długość fali elektronu zwiększy się o: $\quad \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 9{,}5 \cdot 10^{-10}\, m$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1

Źródło monochromatyczne o mocy $P = 10^{-2} W$ wysyła $n = 10^{13}$ fotonów na sekundę. Obliczyć długość fali wysyłanych fotonów.

Odp: $\lambda = 0{,}2 nm$

Zadanie 2

Temperatura ciała doskonale czarnego wynosiła 2000 K. O ile stopni zmieniła się temperatura, gdy najbardziej prawdopodobna długość fali w jego widmie wzrosła o 500 nm.

Odp: zmalała o 510 K.

Zadanie 3

Maksimum promieniowania ciała doskonale czarnego przypada dla długości fali $\lambda_{max} = 580 nm$. Wyznaczyć całkowitą moc wysyłanego promieniowania, jeżeli pole powierzchni ciała wynosi $S = 8 m^2$

Odp: $P = 2{,}84 \cdot 10^4 W$

Zadanie 4

Ciało doskonale czarne podgrzano tak, że najbardziej prawdopodobna długość fali zmieniła się od $\lambda_1 = 0{,}6 \mu m$ do $\lambda_2 = 0{,}2 \mu m$. Ile razy wzrośnie moc wypromieniowana przez ciało?

Odp.: Moc wzrośnie 81-krotnie.

Zadanie 5

Graniczna długość fali dla pewnego metalu jest równa $\lambda_{gr} = 400 nm$. Obliczyć prędkość elektronów wybitych w zjawisku fotoelektrycznym zewnętrznym, jeśli metal oświetlimy światłem nadfioletowym o długości fali $\lambda = \frac{3}{4}\lambda_{gr}$

Odp: v = 603 379 m/s

Zadanie 6

Dla powierzchni oświetlonej promieniowaniem o długości fali $\lambda = 360nm$, potencjał hamowania U jest równy 1,47V . Wyznaczyć graniczną długość fali promieniowania dla zjawiska fotoelektrycznego.

Odp: $$\lambda_{gr} = \frac{hc}{\frac{hc}{\lambda} - eU} \cong 628nm$$

Zadanie 7

Obliczyć długości fal pierwszych dwóch linii w serii Paschena (przeskok elektronu w atomie wodoru na 3 orbitę) oraz granicę tej linii. W jakiej części widma leżą te linie?

Odp $\lambda_1 = 1875nm$ $\lambda_2 = 1282nm$

Linie te leżą w podczerwieni.

Zadanie 8

Wyznaczyć długość fali w widmie zjonizowanego helu, odpowiadającą przejściu elektronu z orbity trzeciej na drugą.

Odp: $\lambda = 164nm$

Zadanie 9

Przy wzroście energii elektronu o $\Delta E = 200eV$, długość fali de Broglie'a zmalała dwa razy. Znaleźć początkową długość fali elektronu.

Odp: $\lambda = 1{,}5 \cdot 10^{-10} m$

Zadanie 10

Na atom wodoru pada foton i wybija z niego elektron o energii kinetycznej $E_k = 5eV$. Obliczyć energię padającego fotonu, jeśli atom znajdował się w stanie wzbudzonym o liczbie kwantowej $n = 2$.

Odp: $E_f = 8{,}4eV$

Zadanie 11

Wyznaczyć najmniejszy potencjał hamujący konieczny do zahamowania elektronów wysyłanych przez fotokatodę, jeśli pada na nią promieniowanie o długości fali $\lambda = 490nm$, a granica zjawiska fotoelektrycznego odpowiada długości fali $\lambda_{gr} = 670nm$

Odp $U_h = -0{,}68V$

Zadanie 12

O ile zmieni się długość fali de Broglie'a elektronu przy przejściu z drugiej orbity stacjonarnej na pierwszą

a) w atomie wodoru

b) w jednokrotnie zjonizowanym atomie helu

Odp: a) $\Delta\lambda = 3{,}3 \cdot 10^{-10} m$ b) $\Delta\lambda = 1{,}65 \cdot 10^{-10} m$

Zadanie 13

Oszacować, ile razy zwiększy się promień orbity elektronu w atomie wodoru znajdującym się w stanie podstawowym przy wzbudzeniu go fotonem o energii 12,08 eV.

Odp: Promień wzrośnie 9-krotnie.

Zadanie 14

Gaz składający się z atomów wodoru w stanie podstawowym jest naświetlany światłem monochromatycznym, w wyniku czego zaczyna on emitować dokładnie trzy linie widmowe. Wyznaczyć długość fali światła wzbudzającego.

Odp.: $\lambda = 9{,}7 \cdot 10^{-8}\, m$

Zadanie 15

Napięcie hamujące ruch fotoelektronów w fotokomórce próżniowej, oświetlonej światłem o długości fali $\lambda = 400 nm$, wynosi $U = 106 mV$. Oblicz wartość pracy wyjścia materiału fotokatody i częstotliwość graniczną zjawiska fotoelektrycznego

Odp.: $W = 3eV$ $\nu_{gr} = 7{,}244 \cdot 10^{14} Hz$

Zadanie16

W atomie wodoru elektron przeskakuje z trzeciej orbity na pierwszą. Oblicz zmianę pędu i energii kinetycznej elektronu. Dane: masa elektronu *m*, ładunek elektronu *e*, stała Plancka *h*, przenikalność elektryczna próżni ε_0.

Odp.: $\Delta p = -\frac{me^2}{6\pi\varepsilon_0\hbar}$ $\Delta E_k = -\frac{15}{16} \cdot \frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}$

Zadanie17

Na powierzchnię metalu pada strumień fotonów o częstości n = 3 razy większej niż częstość graniczna ν_{gr}. Oblicz długość fali de Broglie'a elektronów o maksymalnej energii kinetycznej

Dane: masa elektronu *m*, ładunek elektronu *e*, stała Plancka *h*, prędkość światła *c*.

Odp.: $\lambda = \sqrt{\frac{h}{2(k-1)m\nu_{gr}}}$

Zadanie18

Maksymalna wartość energii kinetycznej elektronów w efekcie Comptona jest równa energii spoczynkowej elektronu $E_o = m_o c^2 \cong 0{,}5 MeV$. Oblicz energię padających fotonów.

Odp.: $E_f = 0{,}7 MeV$

Zadanie19

Kwant o energii $E_\gamma = 1 MeV$ zderzył się centralnie ze swobodnym elektronem, a następnie wywołał efekt fotoelektryczny wewnętrzny. Oblicz energie kinetyczne obu elektronów. Energia spoczynkowa elektronu $E_o = m_o c^2 \cong 0{,}5 MeV$

Odp.: $(E_k)_1 = 0{,}8 MeV$ $(E_k)_2 = 0{,}2 MeV$