PROGRAM ROZWOJOWY
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Zadania dla Wydziału Transportu

Zadania z rozwiązaniami

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1.

Dwie cząstki poruszają się w ten sposób, że ich położenia względem danego układu współrzędnych opisane są wektorami: $\overrightarrow{r_1} = [\,4t^2 - 1,\ -3t^2 + t, 6\,]$

$$\overrightarrow{r_2} = [\,2t^3 - 5\mathrm{t} + 3,\ 5,\ 3t - 2]$$

Znaleźć:

a) wektor położenia cząstki pierwszej względem drugiej
b) Prędkość cząstki pierwszej względem drugiej
c) Przyspieszenie cząstki drugiej względem pierwszej

Rozwiązanie:

a) $\Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2} = [-2t^3 + 4t^2 + 5\mathrm{t} - 4, -3t^2 + \mathrm{t} - 5, -3\mathrm{t} + 8]$

b) Możemy najpierw znaleźć prędkość każdej z cząstek

$$\overrightarrow{V_1} = \frac{d\overrightarrow{r_1}}{dt} = [8\mathrm{t}, -6\mathrm{t} + 1, 0]$$

$$\overrightarrow{V_2} = \frac{d\overrightarrow{r_2}}{dt} = [6t^2 - 5, 0, 3]$$

a następnie prędkość względną $\Delta\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} = [-6t^2 + 8\mathrm{t} + 5, -6\mathrm{t} + 1, -3]$

lub od razu $\Delta\overrightarrow{V} = \frac{d\Delta\overrightarrow{r}}{dt} = [-6t^2 + 8\mathrm{t} + 5, -6\mathrm{t} + 1, -3]$

c) $\Delta\overrightarrow{a} = \frac{d\Delta\overrightarrow{V}}{dt} = [\,-12\mathrm{t} + 8, -6, 0]$

Zadanie 2.

Znaleźć logarytmiczny dekrement drgań tłumionych wahadła, jeśli w ciągu 5min wahań, jego energia maleje 225 razy. Okres drgań 0,5s.

Rozwiązanie:

Całkowita energia drgań związana jest z amplitudą A w następujący sposób:

$$E = \frac{1}{2}\mathrm{k}A^2$$

Ponieważ energia zmalała 225 razy, to znaczy, że amplituda zmalała 15 razy.

Amplituda drgań tłumionych wyraża się wzorem:

$A = A_0 \exp(-\beta t)$ gdzie A_0 - amplituda początkowa

β - współczynnik tłumienia

t - czas

Korzystając z warunków podanych w zadaniu:

$$A = \frac{A_0}{15}$$

$$\frac{A_0}{15} = A_0 \exp(-\beta t)$$

$$\frac{1}{15} = \exp(-\beta t)$$

Logarytmując obustronnie: $\ln 15 = \beta t$

Stąd: $\beta = \frac{ln15}{t}$

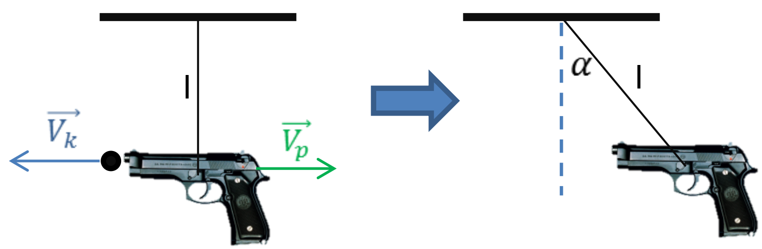
Podstawiając t = 5min = 300s

Mamy: $\beta = \frac{ln15}{300} \approx 0{,}009$

Stąd logarytmiczny dekrement tłumienia: $\Lambda = \beta \cdot \mathrm{T} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ln15}{300} \approx 0{,}0045$

Zadanie 3.

Na nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości l zawieszono pistolet sprężynowy o masie M tak, że lufa jest skierowana poziomo. Obliczyć maksymalny kąt wychylenia nici po wystrzale, jeżeli kula o masie m przy wylocie z lufy miała prędkość V_K.



Rozwiązanie:

Początkowy pęd układu pistolet – kula (przed wystrzałem) był równy zero.

Pęd kuli w momencie wystrzału:

$$\vec{p_k} = \mathrm{m}\vec{V_k}$$

Korzystając z zasady zachowania pędu:

$0 = \vec{p_k} + \vec{p_p}$ gdzie $\vec{p_p}$ - pęd pistoletu

$$\vec{p_p} = \mathrm{M}\vec{V_p}$$

Podstawiając: $0 = mV_k - \mathrm{M}V_p$

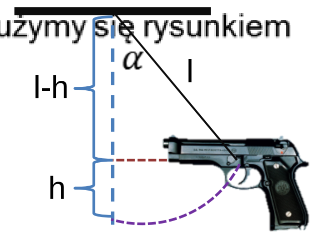
Stąd prędkość pistoletu po wystrzale: $V_p = \frac{mV_k}{M}$ (*)

Aby obliczyć na jaką maksymalną wysokość wzniesie się pistolet po wystrzale korzystamy z zasady zachowania energii mechanicznej (obliczamy maksymalną wysokość, więc pomijamy straty energii).

$$\frac{MV_p^{\ 2}}{2} = \mathrm{Mgh} \Rightarrow \mathrm{h} = \frac{V_p^{\ 2}}{2g}$$

Czyli podstawiając zależność (*): $h = \frac{m^2 V_k^{\ 2}}{2gM}$

W celu znalezienia kąta wychylenia nici posłużymy się rysunkiem



$$cos\alpha = \frac{l-h}{l} = 1 - \frac{h}{l}$$

$$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{h}{l}\right)$$

Ostatecznie: $\alpha = \arccos\left[1 - \frac{m^2 V_k^{\ 2}}{2gMl}\right]$

Zadanie 4.

Piłka zostaje rzucona pionowo w dół z wysokości h na podłogę i odbija się od niej wielokrotnie. Jaką prędkość początkową należy nadać piłce, aby po n odbiciach wzniosła się na wysokość h, z której została rzucona. Przy każdym odbiciu piłka traci k-tą część swojej energii.

Rozwiązanie:

Po jednym odbiciu z zasady zachowania energii mamy:

Energia początkowa piłki $E_0 = \mathrm{mgh} + \frac{\mathrm{m}V_0^{\ 2}}{2}$ (*) gdzie m - masa piłki

V_0 - początkowa prędkość piłki (szukana)

Strata energii po pierwszym odbiciu: $\Delta E_1 = \frac{1}{\mathrm{k}} E_0$

Stąd energia po pierwszym odbiciu: $E_1 = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{k}}\right) E_0$

Po drugim odbiciu: $E_2 = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{k}}\right) E_1 = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{k}}\right)^2 E_0$

Po n-tym odbiciu: $E_n = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{k}}\right)^n E_0$ (**)

Zgodnie z warunkiem zadania po n-tym odbiciu piłka wznosi się na wysokość h, więc jej energia mechaniczna

$$E_n = \mathrm{mgh} \qquad (***)$$

Podstawiając zależności (*) i (***) do (**) otrzymujemy:

$$mgh = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 \left[\mathrm{mgh} + \frac{\mathrm{m}V_0{}^2}{2}\right]$$

Przekształcając: $mgh\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{-n} - \mathrm{mgh} = \frac{\mathrm{m}V_0{}^2}{2}$

Stąd:

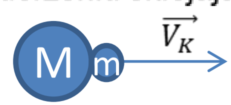
$$V_0 = \sqrt{2gh[\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{-n} - 1]} = \sqrt{2gh[\left(\frac{k}{k-1}\right)^{n} - 1]}$$

Zadanie 5.

Dwie kule o masach M i m poruszają się wzdłuż tej samej prostej w kierunkach przeciwnych. Kule zderzają się całkowicie niesprężyście. Energia kinetyczna kuli M jest n = 10 razy większa od drugiej. Jaki musi być spełniony warunek aby kule po zderzeniu poruszały się w kierunku ruchu kuli M?

Rozwiązanie:

Zderzenie jest całkowicie niesprężyste,a więc kule po zderzeniu sklejają się i jako jedno ciało poruszają się w prawo.



Spełniona jest tylko zasada zachowania pędu.

Początkowy pęd układu: $\overrightarrow{p_0} = \mathrm{M}\overrightarrow{V_1} + \mathrm{m}\overrightarrow{V_2}$

Końcowy pęd układu: $\overrightarrow{p_k} = (\mathrm{M} + \mathrm{m})\overrightarrow{V_k}$

Przyrównując otrzymujemy:

$$\overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_k}$$

$$\mathrm{M}\overrightarrow{V_1} + \mathrm{m}\overrightarrow{V_2} = (\mathrm{M} + \mathrm{m})\overrightarrow{V_k}$$

Zapisując skalarnie: $\mathrm{M}V_1 - \mathrm{m}V_2 = (\mathrm{M} + \mathrm{m})V_k$ (1)

Z warunków zadania wiemy, że:

$E_{K_1} = n \cdot E_{K2}$ (2) gdzie: $E_{K_1} = \frac{1}{2}\mathrm{M}V_1{}^2$ - energia kinetyczna masy M

$E_{K_2} = \frac{1}{2}\mathrm{m}V_2{}^2$ - energia kinetyczna masy m

Wstawiając do wzoru nr 2: $\frac{1}{2}\mathrm{M}V_1{}^2 = n \cdot \frac{1}{2}mV_2{}^2$

Wstawiając do wzoru (1) mamy:

$$\mathrm{M} \cdot \sqrt{n\frac{m}{M}} \cdot V_2 - \mathrm{m}V_2 = (\mathrm{M}+\mathrm{m})V_k$$

$$V_2\left(\sqrt{nMm} - \mathrm{m}\right) = (\mathrm{M}+\mathrm{m})V_k$$

Ponieważ $V_k > 0$ (kulki po zderzeniu poruszają się w prawo), więc:

$$\sqrt{nMm} - \mathrm{m} > 0$$

$$\sqrt{m}\left(\sqrt{nM} - \sqrt{m}\right) > 0$$

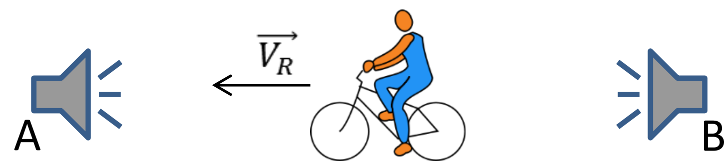
$$\sqrt{nM} > \sqrt{m}$$

$$n\mathrm{M} > m$$

$$n > \frac{m}{M}$$

Zadanie 6.

Rowerzysta porusza się ze stałą prędkością V_R= 6 m/s między dwoma syrenami, z których każda wydaje dźwięk o częstotliwości f_S= 550 Hz. Znaleźć częstotliwość dudnienia jakie usłyszy rowerzysta. Prędkość dźwięku w powietrzu V_D= 330 m/s.



Rozwiązanie:

Występuje tu efekt Dopplera.

Oba źródła są nieruchome. Obserwator – rowerzysta zbliża się do syreny A i oddala od syreny B.

Częstotliwość dźwięku wysyłanego przez syrenę A i odbieranego przez rowerzystę wynosi:

$$f_A = f_S \cdot \frac{V_D + V_R}{V_D}$$

Natomiast przez syrenę B:

$$f_B = f_S \cdot \frac{V_D - V_R}{V_D}$$

Rowerzysta usłyszy dudnienie o amplitudzie zmieniającej się z częstotliwością:

$$\Delta f = f_A - f_B = f_S \cdot \frac{2V_R}{V_D}$$

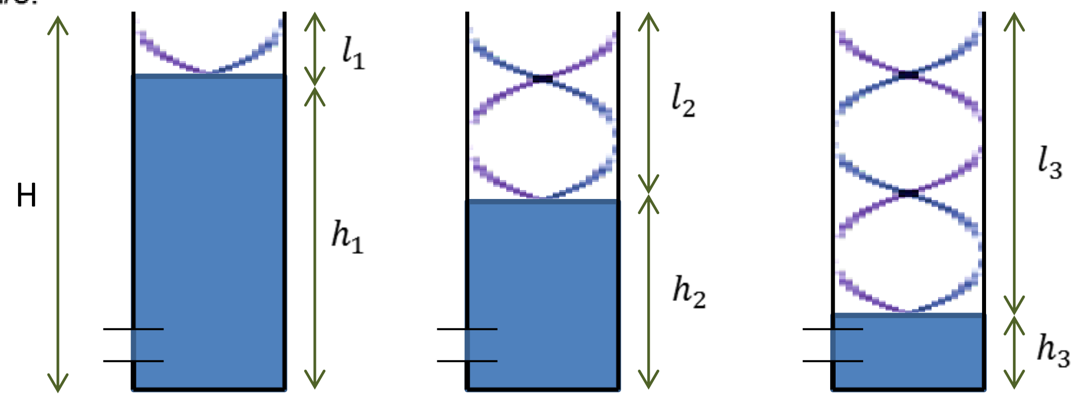
Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy $\Delta f = 20\ Hz$

Zadanie 7.

Wysokie naczynie wypełniono całkowicie wodą. Tuż nad jego górnym brzegiem umieszczono kamerton. Przy dnie naczynia znajduje się mały otwór, przez który woda wypływa na zewnątrz. Podczas obniżania się poziomu wody zarejestrowano trzykrotne wzmocnienie dźwięku kamertonu. Po raz trzeci usłyszno głośniejszy dźwięk kamertonu, gdy wysokość słupa wody w naczyniu wynosiła h_3= 25cm. Wiedząc, że naczynie ma H= 1m wysokości znaleźć częstotliwość dźwięku kamertonu oraz wysokości słupa wody, przy których wystąpiło pierwsze i drugie wzmocnienie. Prędkość dźwięku w powietrzu V_d= 330 m/s.

<u>Rozwiązanie:</u>

Dźwięk kamertonu zostaje wzmocniony, gdy w części naczynia wypełnionej powietrzem powstanie fala stojąca.



1 wzmocnienie $l_1 = \frac{1}{4}\lambda$

2 wzmocnienie $l_2 = \frac{3}{4}\lambda$

3 wzmocnienie $l_3 = \frac{5}{4}\lambda$

Gdzie λ – długość fali stojącej jaka powstała w naczyniu

Dla trzeciego wzmocnienia mamy:

$l_3 = \mathrm{H} - h_3$

Oraz: $l_3 = \frac{5}{4}\lambda$

Stąd: $\frac{5}{4}\lambda = H - h_3$

$\lambda = \frac{4}{5}(H - h_3)$

Częstotliwość dźwięku kamertonu jest równa częstotliwości powstałej fali stojącej.

Ponieważ: $\lambda = \frac{V_d}{\mathrm{f}}$

Stąd: $\mathrm{f} = \frac{V_d}{\lambda}$

Czyli: $\mathrm{f} = \frac{5V_d}{4(H - h_3)}$

Podstawiając dane z zadania otrzymujemy: $\mathrm{f} = \frac{5 \cdot 330\frac{m}{s}}{4(1m - 0{,}25m)} = 550\mathrm{Hz}$

Przy pierwszym wzmocnieniu:

$$l_1 = \frac{1}{4}\lambda$$

Oraz: $h_1 = \mathrm{H} - l_1$

Czyli: $h_1 = \mathrm{H} - \frac{1}{4}\lambda = \mathrm{H} - \frac{1}{4}\cdot\frac{V_d}{\mathrm{f}}$

Wysokość słupa wody wynosiła: $h_1 = 1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{330\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{550\mathrm{Hz}} = 0{,}85\mathrm{m}$

Podczas drugiego wzmocnienia:

$$l_2 = \frac{3}{4}\lambda$$

Czyli wysokość słupa wody wynosiła: $h_2 = \mathrm{H} - l_2 = \mathrm{H} - \frac{3}{4}\lambda$

$$h_2 = 1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{330\frac{m}{s}}{550Hz} = 0{,}55\mathrm{m}$$

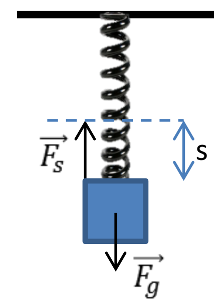
Zadanie 8.

Pionowo wisząca sprężyna po zawieszeniu ciężarka o masie m wydłużyła się o s. Ciężarek ten wprawiono w drgania odciągając go w dół i puszczając. Znaleźć wartość współczynnika tłumienia β, aby:

a) Drgania ustały po 20s (przyjąć, że drgania ustają, gdy ich amplituda osiąga wartość 1% wartości początkowej)

b) Ciężarek nie wykonywał drgań, ale powrócił aperiodycznie do położenia równowagi

c) Logarytmiczny dekrement tłumienia był równy Λ?



<u>Rowzwiązanie:</u>

Po zawieszeniu ciężarka na sprężynie obserwujemy wydłużenie sprężyny o s.

Na ciężarek działają siły: siła ciężkości $F_g = mg$

siła sprężystości $F_s = -ks$

Ponieważ ciężarek chwilowo pozostaje nieruchomy, więc zgodnie z I zasadą dynamiki Newtona:

$$\vec{F_s} + \vec{F_g} = 0$$

$$ks = mg$$

Stąd znajdujemy współczynnik sprężystości: $k = \frac{mg}{s}$ (1)

Ciężarek wprawiony w ruch wykonuje drgania tłumione o amplitudzie zależnej od czasu

$A = A_0 \exp(-\beta t)$ (2) gdzie A_0 - amplituda początkowa

β – szukany współczynnik tłumienia

a) Drgania ustają gdy: $A = 1\% \cdot A_0$

Korzystając ze wzoru (2) mamy: $0{,}01 \cdot A_0 = A_0 \exp(-\beta \mathrm{t})$

Logarytmując obustronnie otrzymujemy: $\ln(0{,}01) = \ln(\exp(-\beta t))$

$\ln(0{,}01) = -\beta t$

Czyli: $\beta = -\frac{\ln(0{,}01)}{t} = \frac{\ln(10^2)}{t} = \frac{2\ln(10)}{t}$

Podstawiając t = 20s otrzymujemy: $\beta = \frac{2\ln(10)}{20} = \frac{\ln(10)}{10}$

b) Ciężarek nie będzie wykonywał drgań, ale powróci aperiodycznie do położenia równowagi, jeśli współczynnik tłumienia $\beta \geq \omega_0$ gdzie ω_0 - pulsacja drgań swobodnych

Ponieważ $\omega_0{}^2 = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}$

Więc korzystając z wyprowadzonej zależności (1) otrzymujemy: $\omega_0{}^2 = \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}}$ (3)

A stąd: $\beta \geq \sqrt{\frac{g}{s}}$

c) Logarytmiczny dekrement tłumienia wiąże sięz okresem drgań tłumionych w następujący sposób:

$\Lambda = \beta T$ (4)

Ponieważ: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ gdzie ω jest pulsacją drgań tłumionych

Oraz: $\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2}$ (5) gdzie ω_0 - pulsacja drgań swobodnych

Z zależnści (4) i (5) otrzymujemy: $\Lambda = \beta \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2}}$

$$\Lambda^2(\omega_0{}^2 - \beta^2) = 4\pi^2\beta^2$$

$$\beta^2(4\pi^2 + \Lambda^2) = \Lambda^2\omega_0{}^2$$

$$\beta = \frac{\Lambda\,\omega_0}{\sqrt{(4\pi^2 + \Lambda^2)}}$$

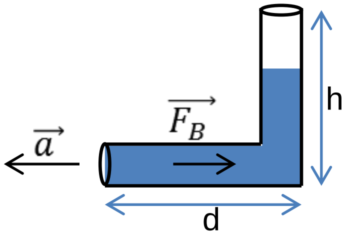
Podstawiając zależność (3) otrzymujemy ostatecznie:

$$\beta = \Lambda\sqrt{\frac{g}{s(4\pi^2 + \Lambda^2)}}$$

Zadanie 9.

Otwarta z obu stron rurka o stałym przekroju jest zgięta pod kątem prostym. Długość poziomej części to d, a długość pionowej części rurki h. W rurce znajduje się ciecz o gęstości ρ. Długość jej słupa wynosi $l > d$. Znaleźć przyspieszenie, z jakim musi poruszać się rurka, aby znajdująca się w niej ciecz nie wylewała się na zewnątrz.

<u>Rozwiązanie:</u>



Rurka musi poruszać się w lewo z nieznanym przyspieszeniem a.
Biorąc pod uwagę układ nieinercjalny związany z rurką, widzimy, że na ciecz działa siła bezwładności.
Siłę bezwładności działającą na poziomy odcinek rurki możemy zapisać:

$$F_B = ma = \rho V a$$

Gdzie V – objętość poziomego odcinka rurki
Oznaczjąc pole przekroju poprzecznego rurki przez S mamy:

$$F_B = \rho S d a$$

W zgięciu rurki muszą równoważyć się ciśnienia:

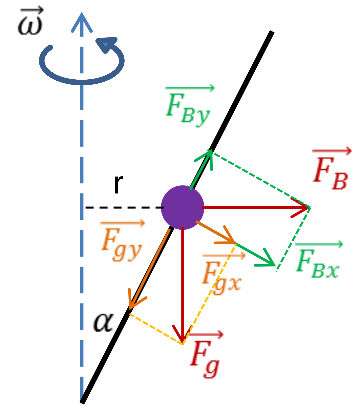
- Ciśnienie hydrostatyczne, które wywiera pionowy słup cieczy: $p_h = \rho g(l - d)$
- Ciśnienie wynikające z siły bezwładności: $p_B = \frac{F_B}{S} = \rho d a$

Stąd: $\rho g(l - d) = \rho d a$

Ostatecznie otrzymujemy minimalne przyspieszenie z jakim powinna poruszać się rurka.

$$a = g \cdot \frac{l - d}{d}$$

Zadanie 10.
Na pręcie nachylonym pod kątem α do pionu znajduje się mały koralik o masie m. Pręt obraca się wokół pionowej osi przechodzącej przez jego koniec ze stałą prędkością kątową ω. Współczynnik tarcia koralika o pręt wynosi f. W jakim przedziale wartości musi być zawarta odległość koralika od osi obrotu, aby nie przesuwał się on względem wirującego pręta. Jak wyglądałaby sytuacja gdyby nie było tarcia?



Rozwiązanie:
W układzie nieinercjalnym związanym z wirującym prętem,, na koralik działają siła ciężkości $\overrightarrow{F_g}$ i siła odśrodkowa $\overrightarrow{F_B}$.
Siła bezwładności (odśrodkowa) zależy od odległości r od osi obrotu:
$$F_B = m\omega^2 r \quad (1)$$
Rozłóżmy obie siły na składowe:
x – prostopadłą do pręta
y – równoległą do pręta
(2) $F_{gx} = F_g \, sin\alpha$ $\quad$ $F_{Bx} = F_B \, cos\alpha$
$F_{gy} = F_g \, cos\alpha$ $\quad$ $F_{By} = F_B \, sin\alpha$
Nawet gdyby nie było tarcia koralik pozostawałby w spoczynku względem pręta jeśli:
$$F_{gy} = F_{By}$$
Czyli:
$$mg \, cos\alpha = m\omega^2 r \, sin\alpha$$
Stąd:
$$r = \frac{g}{\omega^2} \, ctg\alpha$$
Jeśli koralik zostanie przesunięty w górę pręta (dalej od osi), wówczas wzrośnie siła odśrodkowa i jej składowa:
$$F_{By} > F_{gy}$$
Przy braku tarcia koralik zacznie się przesuwać jeszcze dalej. Aby w tym przypadku koralik nie przesuwał się, siła tarcia musi mieć zwrot zgodny ze składową siły ciężkości F_{By}. Maksymalną dozwoloną odległość koralika od osi znajdziemy z zależności: $F_{By} = F_{gy} + T \quad (3)$
Gdzie T oznacza siłę tarcia.
Siłę tarcia obliczymy korzystając ze składowych F_{Bx} siły bezwładności i F_{gx} siły ciężkości:
$$T = f(F_{Bx} + F_{gx}) \quad (4)$$
Podstawiając powyższą zależność do (3) i wykorzystując wzory (2) otrzymujemy:
$$F_B \, sin\alpha = F_g \, cos\alpha + f(F_B \, cos\alpha + F_g \, sin\alpha)$$

Wykorzystując wzór (1) na siłę odśrodkową mamy:

$$\omega^2 r\ (sin\alpha - f cos\alpha) = mg(cos\alpha + f sin\alpha)$$

A stąd dostajemy warunek na maksymalną odległość koralika od osi:

$$r_{max} = \frac{g(cos\alpha + f sin\alpha)}{\omega^2(sin\alpha - f cos\alpha)} \qquad (5)$$

Minimalną odległość znajdziemy z warunku:

$$F_{By} + T = F_{gy} \qquad (6)$$

Siła tarcia przeciwdziała zsuwaniu się koralika coraz niżej. Podstawiając do (6) wzór na siłe tarcia (4) oraz wykorzystując zależności (2) mamy:

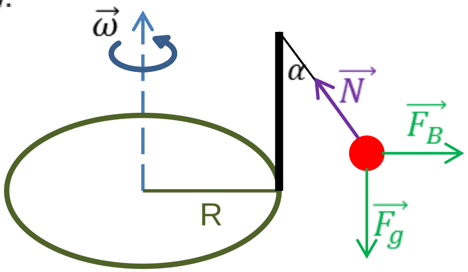
$$F_B\ sin\alpha + f\left(F_B cos\alpha + F_g sin\alpha\right) = F_g cos\alpha$$

Uwzględniając wzór (1) otrzymujemy warunek na minimalną odległość koralika od osi:

$$r_{min} = \frac{g(cos\alpha - f sin\alpha)}{\omega^2(sin\alpha - f cos\alpha)}$$

Zadanie 11.

Pozioma tarcza o promieniu R obraca się wokół pionowej osi przechodzącej przez jej środek ze stałą nieznaną prędkością kątową. Na brzegu tarczy zamocowano pionowy słupek, do którego przywiązano nitkę o długości L, na końcu której znajduje się mała kuleczka o masie m. Znaleźć prędkość kątową tarczy.



Rozwiązanie:

W układzie nieinercjalnym związanym z wirującą tarczą na kulkę działają: siła ciężkości $\vec{F_g}$, naprężenie nitki N i siła odśrodkowa $\vec{F_B}$.

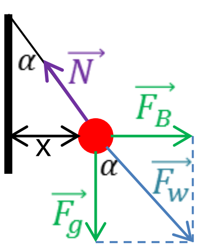
Wypadkowa siły ciężkości i siły bezwładności jest równoważona przez siłę naprężenia nitki.

$$\frac{F_B}{F_g} = tg\alpha$$

$$F_B = F_g\ tg\alpha \quad (1)$$

Wiedząc, że siła bezwładności $F_B = m\omega^2 r$ (2)

Gdzie r jest odległością od osi obrotu.



Porównując (1) i (2) mamy: $F_g\, tg\alpha = m\omega^2 r$

$mg\, tg\alpha = m\omega^2 r$

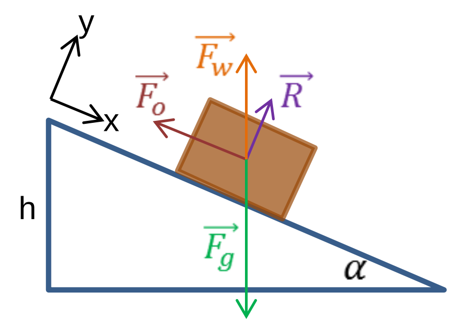
Stąd: $\omega^2 = g\frac{tg\alpha}{r}$

Podstawiając $r = R + x$, gdzie $x = l\, sin\alpha$

Otrzymujemy ostatecznie: $\omega = \sqrt{\frac{g tg\alpha}{R + l sin\alpha}}$

Zadanie 12.

Równia pochyła o kącie nachylenia α i wysokości h została zanurzona w cieczy o gęstości ρ_C. Ze szczytu równi zsuwa się klocek aluminiowy o gęstości ρ_k. Wiedząc, że siły oporów ruchu są n razy mniejsze od ciężaru klocka, znaleźć czas po którym zsunie się on z równi. Równia jest przymocowana do podłoża.



Rozwiązanie:

Na klocek znajdujący sie na równi zanurzonej w cieczy działają siły pokazane na rysunku.

$\vec{F_g}$ - siła ciężkości

$\vec{F_w}$ - siła wyporu

$\vec{F_o}$ - siła oporu

$\vec{R}$ - siła reakcji

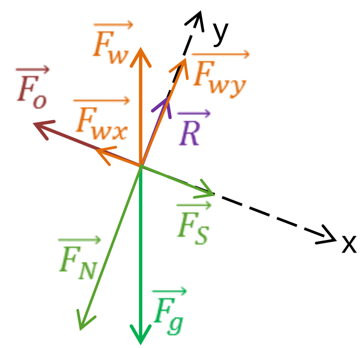
Rozkładamy siły na składowe:

x – równoległą do równi

y – prostopadłą do równi

i otrzymujemy (1):

$$F_N = F_g\, cos\alpha$$
$$F_S = F_g\, sin\alpha$$
$$F_{wy} = F_w\, cos\alpha$$
$$F_{wx} = F_w\, sin\alpha$$



Dla składowej y mamy warunek: $F_N = F_{wy} + R$ czyli $R = F_N - F_{wy}$

Dla składowej x stosujemy drugą zasadę dynamiki Newtona: $ma = F_S - F_{wx} - F_o$ gdzie m- masa klocka

a- przyspieszenie klocka

Wstawiając do powyższego równania zależność (1) otrzymujemy: $ma = mg\, sin\alpha - F_w\, sin\alpha - F_o$ (2)

Z warunków zadania wiemy, że: $F_o = \frac{F_g}{n}$

Stąd: $ma = mg\ sin\alpha - \frac{1}{n} mg - F_w\ sin\alpha$

Oznaczając przez V objętość klocka, siłę wyporu możemy zapisać: $F_w = \rho_C\ Vg$

Uwzględniając również to, że $m = \rho_k V$ równanie (2) przyjmuje postać:

$$\rho_k V a = \rho_k V g \left(sin\alpha - \frac{1}{n} \right) - \rho_C V g\ sin\alpha$$

Stąd wyznaczamy przyspieszenie klocka a:

$$a = g\left(sin\alpha - \frac{1}{n} - \frac{\rho_c}{\rho_k}\ sin\alpha \right) = g\left(sin\alpha \left(1 - \frac{\rho_C}{\rho_k} \right) - \frac{1}{n} \right) \quad (3)$$

Czas zsuwania się klocka znajdujemy ze wzoru na drogę dla ruchu jednostajnie przyspieszonego:

$$l = \frac{at^2}{2}$$ gdzie l – długość równi

Przekształcając powyższy wzór i korzystając ze związku między długością równi l a jej wysokością h:

$$\frac{h}{l} = sin\alpha$$

Znajdujemy szukany czas: $t = \sqrt{\frac{2h}{ag\ sin\alpha}}$

Podstawiając (3) otrzymujemy ostatecznie:

$$t = \sqrt{\frac{2\ h\ n\ \rho_k}{g\ sin\alpha\ (n\ sin\alpha\ (\rho_k - \rho_C) - \rho_k)}}$$

Zadanie 13.

Koło o romieniu R = 2m obraca się w ten sposób, że kąt obrotu jest następującą funkcją czasu:

$$\varphi = 2t^4 + 3t^2 + 4\ \text{rad}$$

Znaleźć dla punktów znajdujących się na brzegu koła w chwili czasu t = 3s od momentu rozpoczęcia ruchu:

a) Prędkość kątową
b) Prędkość liniową
c) Przyspieszenie kątowe
d) Przyspieszenie styczne, normalne, całkowite
e) Przedstaw wektory: $\vec{\omega}$, $\vec{V}$, $\vec{\varepsilon}$, $\vec{a_s}$, $\vec{a_n}$, $\vec{a}$

Rozwiązanie:

a) Wartość prędkości kątowej znajdujemy bezpośrednio z definicji:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \dot{\varphi}(t) = 8t^3 + 6t$$

Dla chwili czasu t = 3s otrzymujemy: $\omega(t = 3s) = 234\frac{rad}{s}$

b) Prędkość liniową znajdujemy z zależności między wartościami prędkości liniowej i kątowej:

$$V = \omega \cdot R$$

Stąd: $V(t) = 2t(4t^2 + 3) \cdot R$

$$V(t = 3s) = 468\frac{m}{s}$$

c) Przyspieszenie kątowe jest pochodną prędkości kątowej:

$$\varepsilon(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \dot{\omega}(t) = 24t^2 + 6$$

Dla t = 3s otrzymujemy: $\varepsilon(t = 3s) = 222\frac{rad}{s^2}$

d) Wartość składowej stycznej przyspieszenia liniowego punktu materialnego jest iloczynem wartości przyspieszenia kątowego i odległości od osi obrotu:

$$a_s = \varepsilon \cdot R$$

Stąd: $a_s(t) = (24t^2 + 6) \cdot R = 444\frac{m}{s^2}$

Składową normalną przyspieszenia liniowego możemy znaleźć ze związku:

$$a_n = \omega^2 \cdot R$$

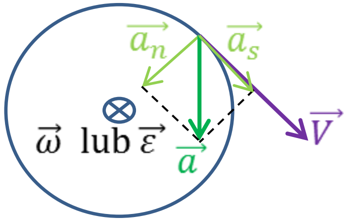
Stąd: $a_n(t) = \omega^2(t) \cdot R = (8t^3 + 6t)^2 \cdot R$

$$a_n(t = 3s) = \omega^2(t = 3s) \cdot R = 109512\frac{m}{s^2}$$

Wartość przyspieszenia liniowego znajdujemy z twierdzenia Pitagorasa:

$$a = \sqrt{{a_s}^2 + {a_n}^2}$$

e)



Zadanie 14.

Promienie dwóch planet wynoszą odpowiednio R_1 i R_2, a przyspieszenia grawitacyjne na powierzchni g_1 i g_2. Wokół tych planet krążą satelity. Obliczyć stosunek promieni orbit dwóch satelitów, których:

a) Prędkości liniowe są jednakowe

b) Prędkości kątowe są jednakowe

Rozwiązanie:

Na satelitę o masie m krążącego wokół planety o masie M po orbicie o promieniu r (gdzie r odległość od środka planety) działa siła grawitacji:

$$F_{gr} = G\frac{Mm}{r^2}$$

Jest ona równa sile dośrodkowej koniecznej do utrzymania tego satelity w ruchu po orbicie kołowej:

$$F_d = \frac{mV^2}{r}$$

$$F_{gr} = F_d$$

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mV^2}{r}$$

Stąd znajdujemy zależność prędkości liniowej satelity od środka planety:

$$V = \sqrt{\frac{GMm}{r}}$$

Korzystając z wyrażenia na przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni planety:

$g = \frac{GM}{R^2}$ gdzie G – stała grawitacyjna

R – promień planety

Otrzymujemy: $V = \sqrt{\frac{gR^2}{r}}$

Odpowiednio dla pierwszej i drugiej planety mamy:

$$V_1 = \sqrt{\frac{g_1 {R_1}^2}{r_1}} \quad \text{i} \quad V_2 = \sqrt{\frac{g_2 {R_2}^2}{r_2}} \quad (*)$$

a) Jeśli $V_1 = V_2$, to z zależności (*) otrzymujemy: $\frac{g_1 {R_1}^2}{r_1} = \frac{g_2 {R_2}^2}{r_2}$

A stąd: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{g_1 {R_1}^2}{g_1 {R_2}^2}$

b) Jeśli $\omega_1 = \omega_2$, wówczas możemy wykorzystać zależność między prędkością liniową i kątową: $\omega = \frac{V}{r}$

Z zależności (*) mamy:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g_1 {R_1}^2}{{r_1}^3}} \quad \text{i} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g_2 {R_2}^2}{{r_2}^3}}$$

Gdy $\omega_1 = \omega_2$, to: $\frac{g_1 {R_1}^2}{{r_1}^3} = \frac{g_2 {R_2}^2}{{r_2}^3}$

A stąd: $\frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{\frac{g_1 {R_1}^2}{g_2 {R_2}^2}}$

Zadanie 15.

Na powierzchni jednej planety natężenie pola grawitacyjnego wynosi g_1, a jej potencjał grawitacyjny jest V_1. Znaleźć natężenie pola grawitacyjnego oraz potencjał grawitacyjny na powierzchni drugiej planety, jeśli stosunek gęstości tych planet $k = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, a stosunek pól powierzchni $h = \frac{S_2}{S_1}$.

Rozwiązanie:

Natężenie pola grawitacyjnego planety na jej powierzchni jest równoważne przyspieszeniu grawitacyjnemu i wyraża się wzorem:

$$g = \frac{GM}{R^2} \qquad (1)$$

gdzie M – masa planety
R – promień planety
G – stała grawitacyjna

Potencjałem pola grawitacyjnego nazywamy stosunek energii potencjalnej masy próbnej m do wartości tej masy:

$$V = \frac{E_p(R)}{m} = -\frac{GM}{R} \qquad (2)$$

Korzystając ze wzoru na pole powierzchni kuli: $S = 4\pi R^2$

Możemy zapisać promień planety w postaci: $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ (3)

Natężnie pola grawitacyjnego drugiej planety znajdujemy z zależności (1):

$$g_2 = \frac{GM_2}{{R_2}^2} = \frac{\mathrm{G}\,\frac{4}{3}\,\pi\,{R_2}^3\,\rho_2}{{R_2}^2} = \frac{4}{3}\,\pi\,G\,\rho_2\,R_2$$

Gdzie ρ_2 jest gęstością drugiej planety.
Podstawiając wzór na promień (3) dostajemy:

$$g_2 = \frac{4}{3}\,\pi\,G\,\rho_2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_2}{\pi}} = \frac{2}{3} G\,\rho_2\,\sqrt{\pi\,S_2}$$

Analogicznie: $g_1 = \frac{2}{3} G\,\rho_1\,\sqrt{\pi\,S_1}$

Biorąc pod uwagę zależności podane w zadaniu: $\rho_2 = k\rho_1$ oraz $S_2 = nS_1$

Otrzymujemy ostatecznie:

$$g_2 = \frac{2}{3}\,G\,k\rho_1\,\sqrt{\pi\,nS_1} = k\sqrt{n} \cdot \frac{2}{3}\,G\rho_1\,\sqrt{\pi\,S_1} = k\sqrt{n}\,g_1$$

Potencjał powierzchni drugiej planety znajdujemy w podobny sposób.

Zgodnie z zależnością (2): $V_2 = -\frac{GM_2}{R_2}$

$$V_2 = -\frac{G\,\frac{4}{3}\,\pi\,{R_2}^3\,\rho_2}{R_2} = -\frac{4}{3}\,\mathrm{G}\,\pi\,\rho_2\,{R_2}^2$$

Wykorzystując wzór na promień (3) otrzymujemy:

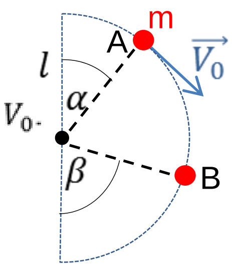
$$V_2 = -\frac{4}{3}\,\mathrm{G}\,\pi\,\rho_2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{S_2}{\pi} = -\frac{1}{3}\,G\,\rho_2\,S_2$$

Oraz: $V_2 = -\frac{1}{3}\,G\,\rho_1\,S_1$

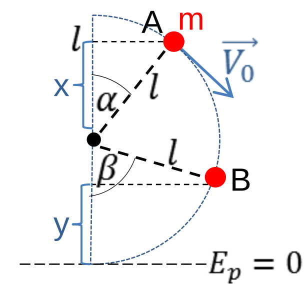
Biorąc pod uwagę zależności (4) dostajemy:

$$V_2 = -\frac{1}{3}\,G\,k\rho_1 \cdot nS_1 = knV_1$$

Zadanie 16.



Małą kulkę o masie m zawieszono na nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości l. Może się ona obracać w płaszczyźnie pionowej. Kulkę odchylono tak, że nić tworzy z pionem kąt α, a następnie nadano jej prędkość V_0. Obliczyć naprężenie nici w chwili, gdy tworzy ona z pionem kąt β. Pominąć opory ruchu.



Rozwiązanie:

Spełniona jest zasada zachowania energii mechanicznej.
Punkt A znajduje się na wysokości $(l + x)$ nad ziemią.
Przy czym: $x = l\, cosx$ (1)
W tym punkcie kulka posiada energię potencjalną: $E_{pA} = mg(l + x)$
I kinetyczną: $E_{kA} = \frac{1}{2} m{V_0}^2$
W punkcie B kulka posiada energię potencjalną: $E_{pB} = mgy$
I kinetyczną: $E_{kB} = \frac{1}{2} m{V_B}^2$
Przy czym: $y = l - l\, cos\beta$ (2)
Zasadę zachowania energii mechanicznej możemy zapisać w postaci:

$$E_{pA} + E_{kA} = E_{pB} + E_{kB}$$

$$mg(l + x) + \frac{1}{2} m{V_0}^2 = mgy + \frac{1}{2} m{V_B}^2$$

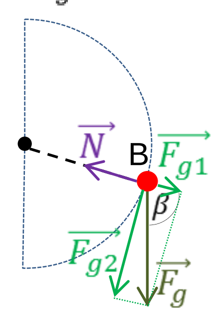
Z powyższego równania możemy wyznaczyć prędkość kulki w punkcie B:

$$gl + gx - gy + \frac{1}{2}{V_0}^2 = \frac{1}{2}{V_B}^2$$

$$V_B = \sqrt{2g(x - y + l) + {V_0}^2} \qquad (3)$$

Z punktu widzenia układu inercjalnego związanego z ziemią w punkcie B, na kulkę działa siła ciężkości $\vec{F_g}$ oraz naprężenie nici $\vec{N}$.
Siłę ciężkości możemy rozłożyć na składowe:

- radialną: $F_{g1} = F_g\, cos\beta$ (4)
- styczną: $F_{g2} = F_g\, sin\beta$

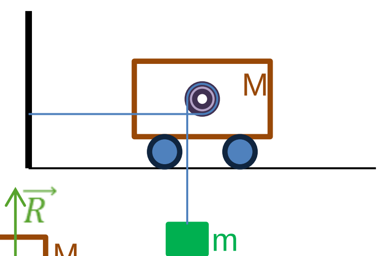


Wypadkowa sił $\vec{N}$ i $\overrightarrow{F_{g1}}$ jest siłą dośrodkową, która nadaje kulce przyspieszenie normalne (dośrodkowe).

Zatem:
$$N - F_{g1} = F_{dośrodkowa}$$
$$N - F_{g1} = \frac{m{V_B}^2}{l}$$
Stąd naprężenie nici:
$$N = F_{g1} + \frac{m{V_B}^2}{l}$$
Korzystając z zależności (3) i (4) otrzymujemy:
$$N = F_g\, cos\beta + \frac{m}{l}\left(2g(x - y + l) + {V_0}^2\right)$$
Podstawiając x i y ze wzorów (1) i (2) mamy:
$$N = mg\, cos\beta + \frac{m}{l}\left(2g(l\, cos\alpha - l + l\, cos\beta + l) + {V_0}^2\right) = mg(2cos\alpha + 3cos\beta) + \frac{m{V_0}^2}{l}$$

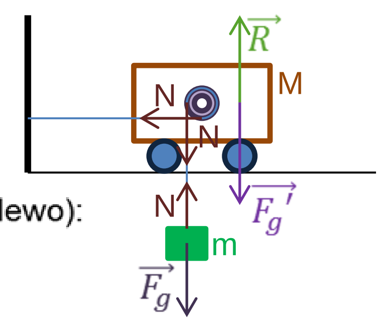
Zadanie 17.

Na wózku o masie M umieszczono bloczek, przez który przerzucono nieważki i nierozciągliwy sznurek. Jeden koniec sznurka został przywiązany do ściany, a do drugiego jego końca przywiązano klocek. Zaniedbując ruch obrotowy bloczka oraz siłę tarcia, znaleźć masę m klocka, który należy zawiesić, aby wózek po przebyciu drogi S osiągnął prędkość V.



Rozwiązanie:

Na rysunku zostały przedstawione siły działające na układ wózek-klocek.



Ponieważ pomijamy tarcie, siła $\overrightarrow{F_g}'$ nie ma wpływu na ruch wózka.

Możemy napisać drugą zasadę dynamiki Newtona dla wózka z klockiem (ruch w lewo):
$$(m + M)a = N \qquad (1)$$
I dla klocka (ruch w dół): $ma = mg - N$ (2)

gdzie N – naprężenie sznurka

Dodając równania (1) i (2) stronami otrzymujemy: $(2m + M)a = mg$

Stąd przyspieszenie układu: $a = \frac{mg}{2m+M}$ (3)

Zakładając, że w chwili początkowej wózek był nieruchomy, możemy skorzystać ze wzorów na prędkość końcową i drogę dla ruchu jednostajnie przyspieszonego: $V = a \cdot t \qquad s = \frac{1}{2}\, at^2$

Eliminując czas z obu powyższych równań otrzymujemy związek między prędkością i przebytą drogą:

$$V^2 = 2as$$

Podstawiając znalezione wcześniej przyspieszenie (2) dostajemy:

$$V^2 = \frac{2mgs}{2m + M}$$

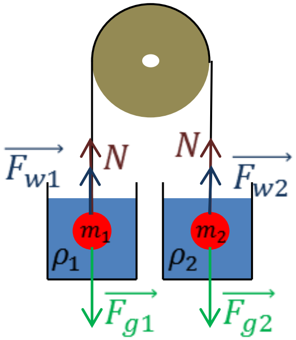
Stąd możemy wyznaczyć szukaną masę m:

$$2mV^2 + MV^2 = 2mgs$$

$$m = \frac{MV^2}{2(gs - V^2)}$$

Zadanie 18.

Przez nieważki bloczek obracający się bez tarcia przerzucono nieważką i nierozciągliwą nić z przywiązanymi na jej końcach kulkami: jedna o masie m_1 i promieniu r_1, druga o masie m_2 i promieniu r_2. Kulkę o masie m_1 zanurzono w cieczy o gęstości ρ_1, a kulkę o masie m_2 w cieczy o gęstości ρ_2. Oblicz przyspieszenie układu zakładając, że porusza się w stronę m_1.



<u>Rozwiązanie:</u>

Na każdą z kulek działa siła wyporu:

(1) $$F_{w1} = \rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi {r_1}^3 g$$

$$F_{w2} = \rho_2 \cdot \frac{4}{3}\pi {r_2}^3 g$$

Siła ciężkości:

(2) $$F_{g1} = m_1 g$$

$$F_{g2} = m_2 g$$

Oraz siła naciągu nici N.

Dla każdej z kulek możemy napisać drugą zasadę dynamiki Newtona. Zakładamy, że ruch odbywa się w stronę masy m_1.

$$m_1 a = F_{g1} - F_{w1} - N$$

$$m_2 a = F_{w2} + N - F_{g2}$$

Po dodaniu stronami otrzymujemy:

$$(m_1 + m_2)a = (F_{g1} - F_{g2}) + (F_{w2} - F_{w1})$$

Wykorzystując wzory (1) i (2) mamy:

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g + \frac{4}{3}\pi g(\rho_2 {r_2}^3 - \rho_1 {r_1}^3)$$

Stąd znajdujemy przyspieszenie układu:

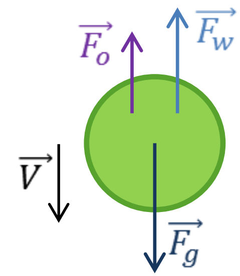
$$a = \frac{(m_1 - m_2) + \frac{4}{3}\pi g(\rho_2 {r_2}^3 - \rho_1 {r_1}^3)}{(m_1 + m_2)}$$

Zadanie 19.

Kulka o gęstości ρ_k i promieniu R spada w cieczy o gęstości ρ_c poruszając się ze stałą, niewielką prędkością. Z jaką siłą należy ciągnąć kulkę do góry, gdy znajduje się ona w tej samej cieczy, aby jej prędkość była stała i n = 4 razy większa niż opadania. Zakładamy, że siła oporu ruchu kulki w cieczy jest proporcjonalna do prędkości.

<u>Rozwiązanie:</u>

Na kulkę poruszającą się w cieczy w dół działają siły jak na rysunku:



gdzie V- prędkość kulki
F_g- siła ciężkości
F_w- siła wyporu
F_o-siła oporów ruchu

Siła wyporu działająca na kulkę wyraża się wzorem:

$$F_w = \rho_c \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 g \qquad (1)$$

Siła ciężkości: $$F_g = \rho_k \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 g \qquad (2)$$

A siła oporu: $F_o = kV$ gdzie k- współczynnik proporcjonalności

Ponieważ kulka porusza się ze stałą prędkością, więc siły działające na kulkę muszą się równoważyć:

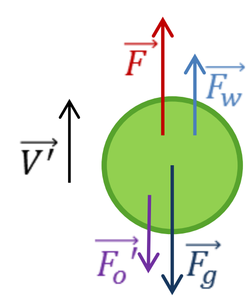
$$F_o + F_w = F_g$$

Podstawiając wyrażenia (1), (2) i (3) mamy:

$$kV + \rho_c \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 g = \rho_k \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 g$$

Stąd: $$F_o = kV = \frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_k - \rho_c) \qquad (4)$$

Gdy zaczniemy działać z nieznaną siłą F od góry, wówczas siły działają na kulkę tak jak to zostało pokazane na rysunku:



W tym przypadku kulka porusza się również ze stałą prędkością V' = 5V. Siły działające na nią muszą się równoważyć.

$$F + F_w = F_o' + F_g$$

Stąd: $$F = F_o' + F_g - F_w \qquad (5)$$

Uwzględniając, że siła oporu w tym przypadku będzie równa $F_o' = kV' = 5kV$ i podstawiając wzory (1) i (2) do (5) mamy:

$$F = 5kV + \rho_k \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 g - \rho_c \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 g$$

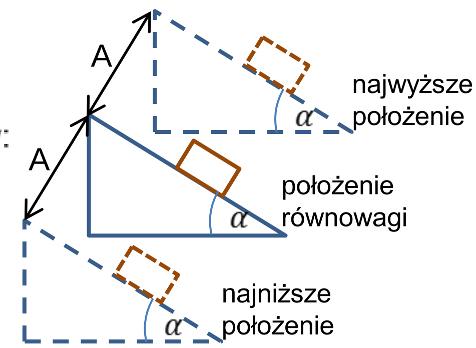
Wykorzystując zależność (4) otrzymujemy ostatecznie:

$$F = 5 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_k - \rho_c) + \frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_k - \rho_c)$$

Zatem: $$F = 8\,\pi R^3 g(\rho_k - \rho_c)$$

Zadanie 20.

Na równi pochyłej o kącie nachylenia α znajduje się klocek o masie m. Równia wykonuje drgania harmoniczne o amplitudzie A w kierunku prostopadłym do swojej powierzchni. Przy jakiej częstotliwości drgań równi klocek nie będzie się z niej zsuwał? Współczynnik tarcia klocka z równią μ.



Rozwiązanie:

W nieinercjalnym układzie odniesienia związanym z drgającą równią na klocek działają siły:

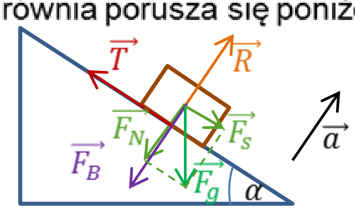
- Ciężkości F_g
- Tarcia T
- Bezwładności F_B
- i reakcji ze strony równi R

Klocek nie będzie się zsuwał z równi, jeśli siła tarcia:

$T = \mu \cdot N$ (1) gdzie N – siła nacisku

będzie większa od siły zsuwającej F_s: $F_s > T$ (2)

Gdy równia porusza się poniżej punktu równowagi:



$F_N = F_g\, cos\alpha$

$F_s = F_g\, sin\alpha$

wówczas siła nacisku $N = F_N + F_B$ i siła tarcia będzie duża.

Największa w położeniu najniższym.

Gdy równia porusza się powyżej punktu równowagi:
wówczas siła nacisku $N = F_N - F_B$ (3)
Siła nacisku będzie najmniejsza gdy równia znajdzie się w położeniu najwyższym
ponieważ siła bezwładności $F_B = ma$ będzie największa.
Przyspieszenie w ruchu harmonicznym wyraża się wzorem:

$$a = -\omega^2 x$$

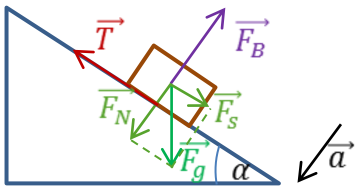
Dla największego wychylenia x = A wartość przyspieszenia: $a = \omega^2 A$
i siła bezwładności w tym punkcie: $F_B = m\omega^2 A$
Zatem siła nacisku (3): $N = F_N - m\omega^2 A = mg\ cos\alpha - m\omega^2 A$ (4)
Wstawiając (4) do (1), a następnie do warunku (2) otrzymujemy:

$$mg\ sin\alpha < (mg\ cos\alpha - m\omega^2 A) \cdot \mu$$

Zatem: $\omega^2 < \frac{\mu g\ cos\alpha - g\ sin\alpha}{\mu A}$

Ponieważ $\omega = 2\pi f$ znajdujemy częstotliwość drgań równi, przy której klocek nie będzie się zsuwał:

$$f < \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g(\mu\ cos\alpha - sin\alpha)}{\mu A}}$$



Zadania do samodzielnego rozwiązania

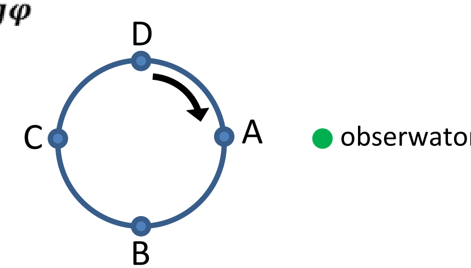
Zadanie 1.
Mucha porusza się po krzywej, której długość s jest dana wzorem:

s = c exp(bt)   c, b – stałe

Wiedząc, że wektor przyspieszenia a tworzy stały kąt φ ze styczną do tego toru w każdym punkcie, znaleźć wartość:
a) Prędkości
b) Przyspieszenia stycznego
c) Przyspieszenia normalnego
d) Promienia krzywizny toru jako funkcji długości łuku krzywej

(Odp.: a) $\mathbf{V = bc\,exp(bt)}$ b) $\boldsymbol{a_S} = \mathbf{b^2c\,exp(bt)}$ c) $\boldsymbol{a_n} = \mathbf{b^2c\,exp(bt)\cdot tg\varphi}$ d) $\boldsymbol{r = s\cdot ctg\varphi}$

Zadanie 2.
Źródło dźwięku o częstotliwości f_Z porusza się po okręgu leżącym w płaszczyźnie poziomej, równoległej do powierzchni Ziemi zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Prędkość źródła jest stała i wynosi V_Z. W którym punkcie będzie znajdowało się źródło, gdy obserwator usłyszy dźwięk o największej częstotliwości. **(Odp.: W punkcie D)**



Zadanie 3.
Drewniany walec o masie m, średnicy 2R i wysokości H pływa w wodzie pionowo. Jaką pracę trzeba wykonać, aby zanurzyć go pod powierzchnię wody tak, aby jego górna podstawa znajdowała się na głębokości h.

(Odp.: $\boldsymbol{W = (\pi R^2\rho_w\, gh - mg)\cdot\left(H + h - \frac{3m}{2\pi R^2\rho_w}\right)}$)

Zadanie 4.
Kamień rzucony ukośnie z powierzchni Ziemi spada po czasie Δt w odległości s od miejsca wyrzucenia. Oblicz siłę, jaką działano na kamień o masie m podczas wyrzucania go, jeśli czas działania tej siły wynosił t_S.

(Odp.: $\boldsymbol{F = \frac{m}{2t_S}\sqrt{\frac{4s^2}{(\Delta t)^2} + g^2(\Delta t)^2}}$)

Zadanie 5.
Na równi pochyłej o kącie nachylenia α położono deskę, a na deskę pudełko o takiej samej masie m jak deska. Współczynnik tarcia statycznego deski o równię wynosi f_1, a pudełka o deskę f_2. Jakie warunki musi spełniać kąt α i współczynniki tarcia f_1 i f_2 aby: a) Oba ciała spoczywały na równi; b) deska spoczywała, a pudełko zsuwało się ruchem jednostajnie przyspieszonym; c) deska zsuwała się z równi ruchem przyspieszonym, a pudełko spoczywało względem deski; d) pudełko poruszało się z większym przyspieszeniem niż deska? **(Odp.: a)** $\boldsymbol{f_1 > tg\alpha\ ,\ f_2 > tg\alpha}$ **b)** $\boldsymbol{2f_1 > f_2 + tg\alpha\ ,\ f_2 < tg\alpha}$ **c)** $\boldsymbol{f_2 > f_1\ ,\ tg\alpha > f_1}$ **d)** $\boldsymbol{tg\alpha > 2f_1 - f_2\ ,\ tg\alpha > f_2}$ **)**

Zadanie 6.
Na równi pochyłej, która tworzy z poziomem kąt α leży klocek o masie m_1. W klocek ten uderza od dołu pocisk o masie m_2 , poruszający się równolegle do równi z prędkością V_1 , przebija go i wylatuje z prędkością V_2. Obliczyć drogę, jaką przebędzie klocek względem równi, jeżeli współczynnik tarcia między klockiem a równią wynosi μ.
(Odp.: $\boldsymbol{s = \frac{{m_2}^2 (V_1 - V_2)^2}{2{m_1}^2 g(sin\alpha + \mu cos\alpha)}}$ **)**

Zadanie 7.
Na tej samej prostej, prostopadłej do przeszkody, znajduje się źródło dźwięku o częstości f_0 i odbiornik. Źródło i odbiornik są nieruchome, a przeszkoda oddala się z prędkością u. Obliczyć różnicę między częstościami odbieranymi przez odbiornik. Prękość dźwięku V. **(Odp.:** $\boldsymbol{\Delta f = f_0 - f = 2f_0 \frac{u}{V} - f_0 \frac{u^2}{V^2}}$ **)**

Zadanie 8.
Dwie małe kulki jednocześnie rozpoczynają swój ruch w wodzie: metalowa o gęstości $\rho_m > \rho_w$ od powierzchni wody, drewniana o gęstości $\rho_d < \rho_w$ od dna naczynia. Oblicz czas i miejsce spotkania sie tych kulek, jeżeli wysokość słupa wody wynosi H, a jej gęstość ρ_w. Oporu stawianego przez ciecz nie uwzględniać.
(Odp.: $\boldsymbol{t = \sqrt{\frac{2H\, \rho_m\, \rho_d}{(\rho_m - \rho_d)\, \rho_w\, g}}}$ **, odległość od dna** $\boldsymbol{s = \frac{(\rho_w - \rho_d)\, \rho_m}{(\rho_m - \rho_d)\, \rho_w}\ H}$ **)**

Zadanie 9.
W naczyniu znajdują się dwie ciecze o gęstościach ρ_1 i ρ_2, które nie mieszają się ze sobą. Sześcian o krawędzi a pływa w naczyniu zanurzając się całkowicie w obu cieczach, przy czym w dolnej do głębokości h. Obliczyć gęstość sześcianu. **(Odp.:** $\boldsymbol{\rho = \frac{h(\rho_2 - \rho_1)}{a} + \rho_1}$ **)**

Zadanie 10.
Człowiek przymocowany jest do gumowej kuli napełnionej wodorem. Łączna masa człowieka i kuli z wodorem jest n raza większa od masy wypartego powietrza. Nie uwzględniając oporu powietrza, obliczyć:

a) Z jakim przyspieszeniem spada człowiek wraz z kulą
b) Na jaką wysokość wzniesie się człowiek, jeżeli podskoczy z kulą pionowo do góry z taką samą prędkością, z jaką podniósłby się bez kuli na wysokość h.

(Odp.: a) $\boldsymbol{a = g\frac{n-1}{n}}$ **; b)** $\boldsymbol{H = \frac{n}{n-1}\ h}$ **)**

Zadanie 11.
Armata o masie M zaczyna się swobodnie zsuwać po płaszczyźnie tworzącej kąt α z poziomem. Gdy armata przebyła drogę s, nastąpił wystrzał w kierunku poziomym, w wyniku czego pocisk uzyskał pęd p, a armata zatrzymała się. Obliczyć czas trwania wystrzału, jeżeli masa pocisku wynosi m.

(Odp.: $\boldsymbol{t = \frac{\left(p\ cos\alpha\ - M\sqrt{2gl\ sin\alpha}\right)}{(M-m)g\ sin\alpha}}$ **)**

Zadanie 12.
n cegieł, każda o masie m i wysokości h leży płasko na ziemi. Jaką najmniejszą pracę trzeba wykonać, aby zbudować z tych cegieł wieżę, ustawiając jedną na drugiej? **(Odp.:** $\boldsymbol{W = \frac{n(n-1)}{2}\ mgh}$ **)**

Zadanie 13.
Ile razy większa byłaby druga prędkość kosmiczna, gdyby gęstość Ziemi i jej promień byłyby dwa razy większe?
(Odp.: $2\sqrt{2}$ **razy)**

Zadanie 14.
Jaką pracę należy wykonać, aby zwiększyć częstotliwość obrotów walca o masie M i promieniu R z f_0 do f_k. Walec obraca się wokół własnej osi. **(Odp.:** $\boldsymbol{W = \pi^2\ MR^2\left({f_k}^2 - {f_0}^2\right)}$ **)**

Zadanie 15.
Wiedząc, że energia kinetyczna bryły sztywnej o momencie bezwładności I wynosi E_K znaleźć moment pędu K tej bryły. **(Odp.:** $\boldsymbol{K = \sqrt{2E_K\, I}}$ **)**

Zadanie 16.
Ciało wyrzucono pod kątem α nadając mu prędkość V_0. Obliczyć kąt β, jaki tworzy wektor prędkości z poziomem na wysokości h. **(Odp.: $tg\beta = \pm\sqrt{tg^2\alpha - \frac{2hg}{V_0}\ cos^2\alpha}$**

Zadanie 17.
Ile wynosi przyspieszenie grawitacyjne g_S na powierzchni Słońca, jeżeli jego promień jest w przybliżeniu n razy większy od promienia Ziemi, a stosunek średniej gęstości Słońca do średniej gęstości Ziemi wynosi k?
(Odp.: $g_S = gnk$)

Zadanie 18.
Obliczyć moc silnika, który mógłby za pomocą pompy o wydajności 90% wypompować 5 m^3 wody na minutę z szybu o głębokości 300m. **(Odp.: 272,5 kW)**

Zadanie 19.
Samolot leci poziomo ze stałą prędkością V_A na wysokości h nad ziemią. W chwili, gdy samolot znajdował się w punkcie S wyskoczył z niego spadochroniarz. Spadochron otworzył się po upływie czasu t_1, a skoczek wylądował na ziemi po czasie t_2 od momentu rozpoczęcia spadania. Zakładając, że początkowo skoczek poruszał się ruchem jednostajnie przyspieszonym, a po otwarciu spadochronu poruszał się pionowo w dół ruchem jednostajnym z prędkością V_B, znaleźć:

a) Prędkość samolotu względem skoczka w funkcji czasu
b) Odległość skoczka od punktu S w funkcji czasu

(Odp.: a) dla $t \le t_1$ $\quad \vec{V_S} = -\vec{g}t$ $\qquad$ **b) dla $t \le t_1$** $\quad s = \sqrt{V_A{}^2\ t^2 + \left(H - \frac{gt^2}{2}\right)^2}$

dla $t_1 < t \le t_2$ $\quad \vec{V_S} = \vec{V_A} - \vec{V_B}\,,\quad V_S = \sqrt{V_A{}^2 - V_B{}^2}$ $\qquad$ **dla $t_1 < t \le t_2$** $\quad s = \sqrt{V_A{}^2\ t_1{}^2 + \left(H - \frac{gt_1{}^2}{2} - V_B(t - t_1)\right)^2}$

Zadanie 20.
Obliczyć pracę, jaką należałoby wykonać, aby przenieść Księżyc z jego orbity okołoziemskiej do nieskończoności. Masa Księżyca $M_K = 7{,}34\ \cdot 10^{22}\ kg$, średnia odległość Ziemia – Księżyc wynosi $R = 3{,}84\ \cdot 10^8\ m$, promień Ziemi $R_Z = 6370\ km$, przyspieszenie ziemskie $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$. **(Odp.: $W = M_K\ \cdot \frac{g\,R_Z}{2R}\ = 37{,}2\ \cdot 10^{27}\ J$)**